GUÍA DEL
ESTUDIANTE
COBATAB

Taller

de pensamiento variacional I

MODELO ACADÉMICO DEL COMPONENTE DE
FORMACIÓN FUNDAMENTAL EXTENDIDO (OPTATIVAS)

5 to Semestre

TABASCO | EDUCACIÓN SECRETARÍA DE EDUCACIÓN | COBATAB

COLEGIO DE BACHILLERES DE TABASCO

Mtro. Fernando Yris Hernández
Director General

Mtra. Ana Fanny Hernández Montero
Directora Académica

Lic. Celis del Carmen Ranero Lara
Subdirectora de Planeación Académica

Mtra. Guadalupe Soberanes Ramón
Jefa del Departamento de Programas de Estudio

UAC: **Taller de pensamiento Variacional I**
Edición: **2025-2026A**

En la realización del presente material participaron:

Ing. Jesús Enrique Garcés Rodríguez
Coordinador

Dra. Sonia Iris Castillo Hernández
Asesora

Mtro. Manolo Martínez Fajardo
Asesor

Mtro. Ramón Augusto Escobar Priego
Asesor

Mtro. Carlos Zapata Valencia
Asesor

Participantes;
Mtra. Adriana Reyes Ramos
Mtra. Joana Gisel Pérez Magaña
Ing. Luis Miguel Ruíz Rodríguez
Mtro. Marcos Alberto Landero de la Cruz
M.C. Mario Arley Vidal Gerónimo
Mtro. Rubicel Lázaro Clemente
Ing. Gabriel Ulín Martínez
Dr. José de Jesús Winzig Vazquez
Mtro. Javier Molina Morales
Mtro. Abisaí Carrillo Zentella
Mtra. Adriana Soberano Morales

POR UNA EDUCACIÓN QUE GENERA CAMBIO

Dr. Reyle Mar Sarao
Moderador

Este material fue elaborado bajo la coordinación y supervisión del Departamento de Programas de Estudio de la Dirección Académica del Colegio de Bachilleres del Estado de Tabasco y el contenido de este es gratuito, sin fines de lucro.

Queda prohibida la reproducción total o parcia de este material por cualquier medio electrónico o mecánico, sin autorización por escrito del Colegio de Bachilleres del Estado de Tabasco.

GUÍA DEL
ESTUDIANTE
COBATAB

5 to Semestre

Datos del Estudiante

Nombre:_____.

Plantel:_____. Grupo:_____. Turno:_____.

MODELO ACADÉMICO DEL COMPONENTE DE
FORMACIÓN FUNDAMENTAL EXTENDIDO (OPTATIVAS)

Taller
de pensamiento variacional I

TABASCO
EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN
COBATAB

Contenido

Contenido 5

Presentación 9

Fundamentación 11

Justificación 12

Enfoque 14

Ubicación de la Formación 16

Mapa de la Formación 17

Progresiones y Temario 19

Propósito de la UAC 21

Conoce tu Guía Didáctica (Simbología) 22

Encuadre de la UAC 25

Dosificación Programática 26

Calendario 2025-2026A 31

- Propósito de la situación 33
- Progresiones para desarrollar la SA1 34
- Metas de Aprendizajes 35
- Subcategorías 36

Situación de Aprendizaje 37

- Problema del contexto 37
- Conflicto cognitivo 38
- Instrumento de Evaluación Situación de Aprendizaje 1 39
- TPV1-SA1-RU01 Rúbrica para evaluar la Situación de Aprendizaje 1 39
- TPV1-SA1-ED01 Evaluación Diagnóstica 42
- Progresión 1 44
  - Lectura: Productos Notables 48

Operaciones con funciones 68

TPV1-SA1-ACT01 Actividad de reforzamiento: Productos notables, Factorización y operaciones con funciones y fracciones algebraicas 74

Progresión 2 76

Noción de Límite 77

CONCEPTO DE LÍMITE 79

PROPIEDADES DE LOS LÍMITES 84

LÍMITE DE FUNCIONES ALGEBRAICAS. 86

Límite de funciones racionales (límites indeterminados) 88

LÍMITES DE FUNCIONES RADICALES 91

LÍMITES INFINITOS 93

LÍMITES AL INFINITO 94

LÍMITES DE FUNCIONES TRASCENDENTES. 96

Límites de Funciones Trigonométricas 96

Límite de Funciones Exponenciales. 99

Límite de Funciones 102

Progresión 3 104

Progresión 4 115

Referencias Bibliográficas 137

Situación de Aprendizaje 2 138

Propósito de la situación 139

Progresiones para desarrollar 140

Metas de Aprendizajes 141

Subcategorías 142

Situación de Aprendizaje 2 143

Problema del contexto 143

Conflicto cognitivo 144
Instrumento de Evaluación Situación de Aprendizaje 2 145
TPV1-SA2-RU02 Rúbrica para evaluar la Situación de Aprendizaje 2 145
TPV1-SA2-ED02 Evaluación Diagnóstica 148
Progresión 5 150
Condiciones 152
Recurso audiovisual 160
Lectura: Teorema de Rolle 161
Interpretación geométrica del Teorema de Rolle 161
Recurso audiovisual 168
TPV1-SA2-ACT01 169
Progresión 6 173
Recurso audiovisual 177
Progresión 7: 189
Lectura: “Modelación matemática” 190
Conceptos Básicos de la Modelación Matemática 190
Problemario TPV1-SA2-ACT04 197
Modelación 197
Lectura: “Máximos, mínimos y puntos de inflexión” 198
Aplicaciones de la derivada (optimización, máximos, mínimos, puntos de inflexión) 198
Aplicación de modelos matemáticos con derivadas en la interpretación de fenómenos de variación. 198
Problemario TPV1-SA2-ACT05 211
Máximos, mínimos y puntos de inflexión 211
Progresión 8: 213
Lectura: “La diferencial como herramienta para la aproximación” 215

Diferencial (concepto intuitivo, notación e interpretación) 215
Aplicaciones de la diferencial (aproximaciones, cálculo de errores, estimaciones) 215
Reforzamiento 222
TPV1-SA2-LC02 Lista de Cotejo 225
Portafolio de Evidencias de las Actividades de Reforzamiento 225
TPV1-SA2-MA02 Mapa de Aprendizajes 226
Referencias Bibliográficas Progresión 5 y Progresión 6 227
Himno 228
Porra 229
Cobachito 230
MISION 231
VISION 231
VALORES 231
Mensaje del director general: Mtro. Fernando Yris Hernández 232

Presentación

¡Bienvenidos al Universo del Cambio!

En el mundo que habitamos, todo está en constante transformación: el crecimiento de un árbol, la velocidad de un auto, la economía de un país. Comprender estas dinámicas no es solo una habilidad matemática; es una **herramienta vital para interpretar y actuar en nuestra realidad**. Este Taller de Pensamiento Variacional I te invita a un viaje extraordinario, donde el cálculo se revela no como un compendio de fórmulas, sino como un **lenguaje universal para describir y predecir el cambio**.

Este no es un curso de trazos y medidas; es un espacio para agudizar tu mente, desarrollar tu intuición y potenciar tu capacidad de resolución de problemas.

Tus Habilidades en el Centro del Aprendizaje

A lo largo de esta UAC, te convertirás en el protagonista de tu propio aprendizaje, desarrollando competencias clave que te prepararán para cualquier desafío profesional y personal. Nos enfocaremos en cuatro pilares fundamentales:

- **1. Habilidad Procedimental:** Desarrollarás una destreza sólida para ejecutar cálculos y algoritmos, utilizando el lenguaje funcional y algebraico con maestría. La meta no es la simple memorización, sino la comprensión profunda que te permite validar y justificar cada paso.
- **2. Intuición y Razonamiento:** Aquí entrenaremos esa chispa de la creatividad. Aprenderás a observar fenómenos, formular conjeturas y, con rigor, a formalizarlas matemáticamente. ¡Desarrollarás tu capacidad para el descubrimiento!
- **3. Solución de Problemas y Modelación:** Las matemáticas dejan de ser abstractas y se vuelven herramientas concretas. Aprenderás a seleccionar y construir modelos matemáticos que te permitan explicar y anticipar el comportamiento de fenómenos en diversas áreas, desde las ciencias hasta la ingeniería.
- **4. Interacción y Lenguaje Matemático:** La comunicación es clave. Dominarás el lenguaje matemático para expresar tus ideas con claridad y precisión, colaborando con tus compañeros para construir un conocimiento más robusto y argumentado.

Tu Guía y Herramienta Indispensable

Esta guía pedagógica es tu mapa. En ella, encontrarás una estructura clara con progresiones de aprendizaje cuidadosamente diseñadas por expertos en la materia. Las actividades prácticas te permitirán aplicar de inmediato tus conocimientos, consolidando tu comprensión.

El **“Taller de Pensamiento Variacional I”** representa una valiosa oportunidad para que desarrolles habilidades esenciales para tu futura carrera universitaria. Es un componente que fortalece tu formación y te prepara para pensar como un científico, un ingeniero o un arquitecto que, con el lenguaje de la variación, puede dar forma a un futuro más innovador.

Agradezco su compromiso y dedicación. ¡Estoy seguro de que juntos, alcanzarán resultados extraordinarios!

Fundamentación

Un Puente entre la Realidad y las Políticas Educativas 🌐

Estimados estudiantes

La transformación educativa en México, impulsada por el **Nuevo Modelo Educativo para la Educación Obligatoria**, exige una reorientación de nuestros programas de estudio. Afirmamos que esta actualización no es solo un cambio administrativo, sino una oportunidad para alinear nuestra enseñanza con las necesidades de un México en constante desarrollo. La Fundación de esta UAC, enmarcada en el **actual desarrollo económico, político, social, tecnológico y cultural del país**, atiende a esta llamada, al enfocarse en habilidades que preparan a los estudiantes para ser ciudadanos críticos y profesionales competentes.

Más Allá de la Competencia: La Integración Holística del Aprendizaje 🎯

La fundamentación de este taller es robusta y coherente, al ir más allá del enfoque tradicional basado en competencias. Se integra de manera orgánica a los **aprendizajes clave** y los **contenidos específicos** que atienden a un modelo educativo más integral. Esto significa que nuestro programa no solo busca que los estudiantes sean "buenos" en matemáticas, sino que desarrollen un **pensamiento variacional** que les permita:

- **Aplicar** conocimientos matemáticos en contextos reales y complejos.
- **Conectar** ideas de distintas disciplinas para resolver problemas multidisciplinares.
- **Desarrollar** habilidades cognitivas superiores como el análisis, la síntesis y la evaluación.

Habilidades Socioemocionales y Temas Transversales: El Eje de la Formación Integral 💔

Desde la perspectiva de la **neurodidáctica**, sabemos que el aprendizaje no es puramente cognitivo; las emociones y las interacciones sociales juegan un papel crucial. Por ello, este programa hace un énfasis particular en el desarrollo de **habilidades socioemocionales**. A través del trabajo colaborativo, la argumentación de ideas y la resolución de problemas en equipo, los estudiantes aprenderán a:

- **Gestionar sus emociones** frente a la frustración de un problema complejo.
- **Comunicar sus ideas** con claridad y respeto.
- **Cultivar la perseverancia y la resiliencia**, cualidades indispensables para cualquier éxito académico o profesional.

Asimismo, al abordar **temas transversales**, esta UAC se conecta con la realidad social y cultural de México, permitiendo a los estudiantes entender la relevancia de las matemáticas en temas como la sostenibilidad, la equidad o el uso responsable de la tecnología.

Justificación

La creación de la Unidad de Aprendizaje Curricular (UAC) de **"Taller de Pensamiento Variacional I"** es una respuesta visionaria a las demandas educativas y sociales del siglo XXI. Se justifica por una necesidad imperante: la de trascender el modelo de enseñanza de las matemáticas centrado en la repetición de algoritmos, para enfocarnos en la formación de un pensamiento crítico y adaptable.

Esta UAC se fundamenta en la premisa de que el mundo moderno —con sus dinámicas económicas, avances tecnológicos y desafíos sociales— se rige por el cambio y la variación. Por lo tanto, el **pensamiento variacional** no es un tema más del currículo, sino una **habilidad fundamental** para que los estudiantes de Educación Media Superior puedan comprender, modelar y resolver problemas complejos en cualquier disciplina. El programa de estudios, al centrarse en los conceptos fundamentales del cálculo, dota a los estudiantes de un lenguaje y un conjunto de herramientas intelectuales indispensables para su desarrollo académico y profesional, preparándolos para estudios superiores en ciencias, ingeniería, economía o cualquier campo que requiera análisis de sistemas dinámicos.

La guía de aprendizaje de esta UAC no es solo un compendio de ejercicios, sino una **herramienta pedagógica cuidadosamente diseñada** para potenciar el proceso de aprendizaje desde un enfoque neurodidáctico. Su estructura y contenidos se justifican en la necesidad de crear un entorno de aprendizaje activo y significativo.

La guía se organiza en torno a los cuatro pilares del pensamiento variacional definidos en el programa de estudios:

1. **Lo Procedural:** A través de actividades guiadas, la guía facilita el desarrollo de la destreza para ejecutar cálculos, pero con un énfasis en la comprensión conceptual. El objetivo es que el estudiante no solo sepa "cómo" resolver un problema, sino que entienda el "por qué" detrás de cada procedimiento.

2. **Intuición y Razonamiento:** La guía promueve la observación y la formulación de conjeturas mediante problemas que estimulan la creatividad y el pensamiento lateral. De esta manera, el estudiante pasa de ser un receptor a un explorador de las matemáticas, desarrollando la intuición que es la base de todo descubrimiento.

3. **Solución de Problemas y Modelación:** Los ejercicios propuestos en la guía están diseñados para conectar los conceptos matemáticos con escenarios del mundo real. Esto permite a los estudiantes aplicar sus conocimientos para construir modelos que explican fenómenos, reforzando la relevancia de las matemáticas en su vida cotidiana.

4. **Interacción y Lenguaje Matemático:** La guía incluye actividades que fomentan el trabajo colaborativo y la comunicación. Esto es crucial, ya que al socializar sus ideas, los estudiantes aprenden a argumentar y a utilizar el lenguaje matemático con rigor, fortaleciendo sus habilidades de pensamiento y expresión.

.

Enfoque

Un Cambio de Paradigma: Del Algoritmo al Pensamiento Crítico

El enfoque de este Taller de Pensamiento Variacional I se aparta del modelo tradicional de "la clase de matemáticas" para abrazar un **paradigma centrado en el pensamiento**. Nuestro principal objetivo no es simplemente enseñar a los estudiantes a resolver ecuaciones o a calcular derivadas, sino a **pensar de manera variacional**: a percibir, interpretar y modelar el cambio en un mundo dinámico.

Este enfoque se basa en la neurodidáctica, reconociendo que el cerebro aprende de manera más efectiva cuando la información se conecta con la realidad y se construye activamente. Por ello, la UAC promueve un aprendizaje profundo y significativo, superando la memorización de fórmulas para generar una verdadera **comprensión conceptual y una habilidad de razonamiento**.

Los Cuatro Pilares del Enfoque Pedagógico

El programa de estudios de este taller está meticulosamente diseñado sobre cuatro pilares interconectados que, desde mi experiencia, son fundamentales para una formación matemática integral. Cada uno de estos elementos tiene una intencionalidad pedagógica clara:

1. **Enfoque en Lo Procedural: La Agilidad al Servicio de la Comprensión** 🧠 No se trata de la repetición mecánica, sino de la **ejecución consciente** de algoritmos. Desarrollamos la habilidad procedural como una herramienta para validar ideas y resolver problemas complejos, asegurando que cada paso tenga un significado. El dominio de herramientas aritméticas, algebraicas y funcionales es el cimiento sobre el cual se construye el pensamiento superior.

2. **Enfoque en la Intuición y el Razonamiento: El Motor de la Creatividad** ✨ Este taller valora la intuición como el punto de partida de todo descubrimiento. El enfoque pedagógico incentiva a los estudiantes a **observar fenómenos, formular conjeturas y luego, con rigor, formalizar sus ideas**. De esta manera, el estudiante se apropia del proceso de creación matemática, fortaleciendo su capacidad para pensar de forma abstracta y lógica.

3. **Enfoque en la Solución de Problemas y la Modelación: Conectando la Matemática con el Mundo** 🌎 Aquí, la UAC toma su mayor relevancia. El enfoque de este taller es utilizar la matemática como una **herramienta para la acción**. A través de la resolución de problemas

POR UNA EDUCACIÓN QUE GENERA CAMBIO

contextualizados, los estudiantes aprenden a seleccionar, construir y aplicar modelos matemáticos para explicar, predecir y tomar decisiones sobre fenómenos de su entorno. Esto convierte la matemática en un lenguaje funcional y aplicable.

4. **Enfoque en la Interacción y el Lenguaje Matemático: La Socialización del Conocimiento**

   El aprendizaje no es un acto solitario. Por ello, el enfoque de este taller fomenta la **interacción y el diálogo**. El estudiante es guiado para utilizar un lenguaje matemático claro y preciso, tanto de forma escrita como verbal, para comunicar sus ideas, argumentar sus posturas y colaborar con sus compañeros. Esta socialización de los conocimientos fortalece la seguridad, el pensamiento crítico y la capacidad de construir conocimiento de forma colectiva.

Ubicación de la Formación

La Unidad de Aprendizaje Curricular (UAC) "Taller de Pensamiento Variacional I" se ubica dentro del programa de estudios de la Educación Media Superior (EMS) en México, específicamente en el Bachillerato General, bajo el componente denominado "Formación Fundamental Extendido". Esta UAC corresponde al quinto semestre y tiene asignados 6 créditos, con una carga semanal de 3 horas de mediación docente.

En el marco del Modelo Educativo del Marco Curricular Común de la Educación Media Superior (MCCEMS), el "Taller de Pensamiento Variacional I" forma parte del Recurso Sociocognitivo del Pensamiento Matemático. Su función es dotar al estudiantado de herramientas conceptuales y cognitivas para el desarrollo del pensamiento matemático avanzado, centrado en el análisis de la variación y el cálculo diferencial.

Dentro del currículo de la EMS, esta UAC está alineada con las metas de formar una ciudadanía reflexiva y capaz de resolver problemas complejos a través del pensamiento matemático y la modelación de situaciones reales. Su carácter transversal le permite integrarse con otras áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos como Lenguaje y Comunicación, así como con recursos socioemocionales, promoviendo una formación integral.

En cuanto a su ubicación en relación con otros programas SEMS, el Taller de Pensamiento Variacional I mantiene vínculos con las unidades curriculares de Pensamiento Matemático I, II y III, y con Temas Selectos de Matemáticas I, entre otras. Forma parte del componente fundamental extendido y contribuye a preparar al estudiante para estudios superiores y actividades

Mapa de la Formación

Contexto general y ubicación

- Semestre: Quinto semestre de Bachillerato General.
- Componente: Formación Fundamental Extendido (optativo).
- Créditos: 6 créditos.
- Horas de mediación docente: Semana 3 horas, total semestral 48 horas.
- Esta UAC forma parte del Recurso Sociocognitivo de Pensamiento Matemático en el Modelo Educativo del Marco Curricular Común de la Educación Media Superior (MCCEMS).

Propósito formativo

- Desarrollar el pensamiento variacional como una herramienta matemática avanzada para el análisis, reflexión e interpretación de problemas científicos, tecnológicos y de la vida cotidiana.
- Potenciar capacidades de comunicación matemática, lenguaje formal y natural, pensamiento intuitivo y formal, visualización e imaginación matemática.
- Fomentar el procesamiento y modelación de fenómenos relacionados con la variación, límites y cálculo diferencial .
- Preparar al estudiante para resolver problemas reales mediante técnicas matemáticas y recursos tecnológicos.

Clave de competencias y aprendizajes

- Aplicar técnicas aritméticas, algebraicas y funcionales para plantear y resolver problemas.
- Comprender formalmente el concepto de límite y sus teoremas para la resolución de problemas.
- Usar la derivada como razón de cambio, entendiendo su base en límites.
- Desarrollar habilidades en comunicación matemática escrita, simbólica y verbal.

- Adoptar procesos de razonamiento matemático: observación, conjetura, argumentación y validación.
- Modelar y proponer soluciones tanto a problemas teóricos como prácticos.

Ejes y categorías del aprendizaje

- Categoría Procesal: Ejecución automatizada de algoritmos y procedimientos.
    - Subcategorías: Elementos aritméticos-algebraicos, geométricos y variacionales.
- Interacción y lenguaje matemático: Precisión en la expresión y comunicación de ideas matemáticas.
- Progresiones: De la ejecución de cálculos y algoritmos básicos a análisis formal y aplicación de límites y derivadas en problemas contextualizados.

Integración transversal

- Vinculación con otras UAC de pensamiento matemático (I, II, III), dibujo técnico, probabilidad, estadística.
- Conexión con áreas de conocimiento como ciencias naturales, tecnología, humanidades y ciencias sociales para el aprendizaje integral.
- Uso de Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) para facilitar la modelación y solución de problemas matemáticos.

Estructura curricular y formativa

- El programa incorpora una metodología activa con actividades para aplicar conocimientos y competencias.
- Evaluación formativa orientada a valorar procesos matemáticos, razonamiento y comunicación.

Progresiones y Temario

Las Progresiones de Aprendizaje son unidades didácticas innovadoras y flexibles para la descripción secuencial de los aprendizajes asociados a la comprensión y solución de necesidades y problemáticas personales y/o sociales (DOF, 09/08/23).

Progresión	Contenido temático
Progresión 1: Aplica técnicas aritméticas, algebraicas y operaciones funcionales a través del planteamiento de problemáticas de las ciencias, para realizar procesos según lo requiera y adecuar la expresión matemática de manera que el estudiantado analice, compruebe e interprete sus hallazgos y resultados.	• Leyes de los exponentes • Factorización • Productos Notables • Fracciones Algebraicas • Evaluación de funciones • Operaciones con funciones • Raices de funciones
Progresión 2: Analiza de manera formal el concepto de límite, profundizando en el cálculo de límites de funciones mediante sus teoremas para dar solución a problemáticas contextualizadas de las ciencias utilizando métodos analíticos y/o recursos tecnológicos.	• Definición de limites • Teoremas de limites
Progresión 3: Analiza la definición formal de derivada a partir del planteamiento de una situación-problema significativa para el estudiantado que evidencie la variación de una recta secante a la recta tangente, con la cual se puedan obtener las reglas de derivación para calcular derivadas de funciones, empleando en caso de ser necesario recursos tecnológicos.	• Definición de derivada : regla de los cuatro pasos, recta tangente, recta secante, interpretación geométrica
Progresión 4: Emplea la regla del producto, la regla del cociente y la regla de la cadena en situaciones-	• Formulas básicas

problema provenientes de recursos sociocognitivos y/o áreas del conocimiento, en donde la función que describe el fenómeno de estudio requiere el uso de una de estas reglas.	• Formulas de derivadas: producto, cociente y regla de la cadena
Progresión 5: Analiza el Teorema de valor medio y Teorema de Rolle, así como su utilidad en el planteamiento y solución a problemas de la vida cotidiana o del entorno que le rodea de manera que el estudiantado analice, compruebe e interprete sus hallazgos y resultados.	• Teorema del valor medio • Teorema de Rolle
Progresión 6: Aplica procedimientos algorítmicos para derivar funciones implícitas y de orden superior, así como el uso de estas últimas para resolver límites indeterminados utilizando la regla de L'Hopital aplicando estas herramientas en la solución de problemas de las ciencias.	• Derivación implícita • Derivadas de orden superior • Regla de L'Hopital
Progresión 7: Aplica y/o construye modelos para encontrar la solución de situaciones-problema de su contexto, usando la derivada como una herramienta que le permite interpretar y explicar fenómenos de variación estudiados por las ciencias considerando herramientas analíticas y/o tecnológicas en la modelación.	• Modelación matemática • Uso de software (GeoGebra, Wólfram Alfa, Excel) • Aplicaciones de la derivada (optimización, máximos, mínimos, puntos de inflexión)
Progresión 8: Construye modelos matemáticos, identificando las variables que se relacionan entre sí, obteniendo de manera intuitiva la diferencial como una herramienta para darle solución a problemas de las ciencias que le permita obtener información y analizar los resultados para la toma de decisiones.	• Diferencial (concepto intuitivo, notación e interpretación) • Aplicaciones de la diferencial (aproximaciones, cálculo de errores, estimaciones)

POR UNA EDUCACIÓN QUE GENERA CAMBIO

Propósito de la UAC

Buscar que el estudiantado observe, analice, modele, resuelva e interprete problemas reales y de su comunidad, usando la derivada como razón de cambio a partir de su entendimiento como un límite, además de usar Teoremas propios del cálculo diferencial, valorando y adaptando la aplicación de procesos de razonamiento matemático que le permitan relacionar la información y obtener conclusiones para elaborar algoritmos que anticipen, predigan o validen la solución de problemas propios de las ciencias y de su entorno.

Conoce tu Guía Didáctica (Simbología)

Ícono	Descripción
	Lectura: Indica que el estudiante deberá realizar la lectura correspondiente a los conocimientos básicos del Programa de Estudio. Esta lectura proporciona los fundamentos teóricos esenciales para el desarrollo del submódulo.
	Material audio visual: Representa recursos audiovisuales complementarios que refuerzan los contenidos básicos del Programa de Estudio. Se sugiere visualizar el material a través de un video, generalmente indicado con un código QR proporcionado por el docente.
	Actividad: Sección destinada a una actividad teórica o escrita que permite al estudiante aplicar, reflexionar o consolidar los aprendizajes esperados del Programa de Estudio. Su producto puede ser utilizado como parte de la evaluación formativa.
	Práctica: Momento para realizar una actividad práctica guiada que vincula la teoría con la práctica. Permite aplicar los conocimientos adquiridos y suele acompañarse del instrumento de evaluación o reporte de prácticas correspondiente.
	Docente explica: Espacio sugerido para que el docente profundice, ejemplifique o adapte los conocimientos del Programa de Estudio al contexto de su grupo o comunidad educativa.
	Actividad SIGA: Indica la actividad o producto que debe ser registrado en la plataforma SIGA como evidencia obligatoria del avance del estudiante. La palabra “EVIDENCIA” debe aparecer resaltada.
	Evaluación Diagnóstica: Actividad inicial del submódulo que permite identificar los conocimientos previos del estudiante. Sus resultados orientan la planeación didáctica y las estrategias de acompañamiento.

Ícono	Descripción
	Instrumento de evaluación: Documento que establece los criterios, niveles de desempeño y ponderaciones que se utilizarán para evaluar el producto esperado. Puede presentarse como rúbrica, lista de cotejo u otro formato adecuado.
	Encuadre: Presenta el esquema de evaluación del submódulo, señalando los porcentajes asignados a cada tipo de actividad o evidencia, así como acuerdos generales entre docente y estudiantes.
	Dosificación: Calendario que muestra la distribución de los conocimientos del Programa de Estudio a lo largo del semestre. Incluye fechas, temas y actividades a desarrollar.
	PAEC: Proyecto Aula-Escuela-Comunidad, una estrategia de innovación educativa que vincula el aprendizaje con el entorno social. Aquí se trabajan productos integradores o actividades comunitarias.
	Estudio independiente: Actividad diseñada para que el estudiante trabaje de manera autónoma. Refuerza contenidos, promueve la autoevaluación y fomenta hábitos de estudio fuera del aula.
	Conflicto Cognitivo: Presenta una situación problema, caso o pregunta retadora que genera duda o sorpresa, motivando al estudiante a cuestionar sus ideas previas y activar su pensamiento crítico.
	Audio o Podcast: Recurso auditivo que complementa el contenido. Puede incluir entrevistas, narraciones, explicaciones o reflexiones, y está diseñado para fomentar la comprensión auditiva y la autonomía del estudiante.
	Tarea (Extramuros): Actividad que se desarrolla fuera del horario escolar, en casa o en el entorno del estudiante. Refuerza lo aprendido en clase y promueve la vinculación del conocimiento con la vida cotidiana.

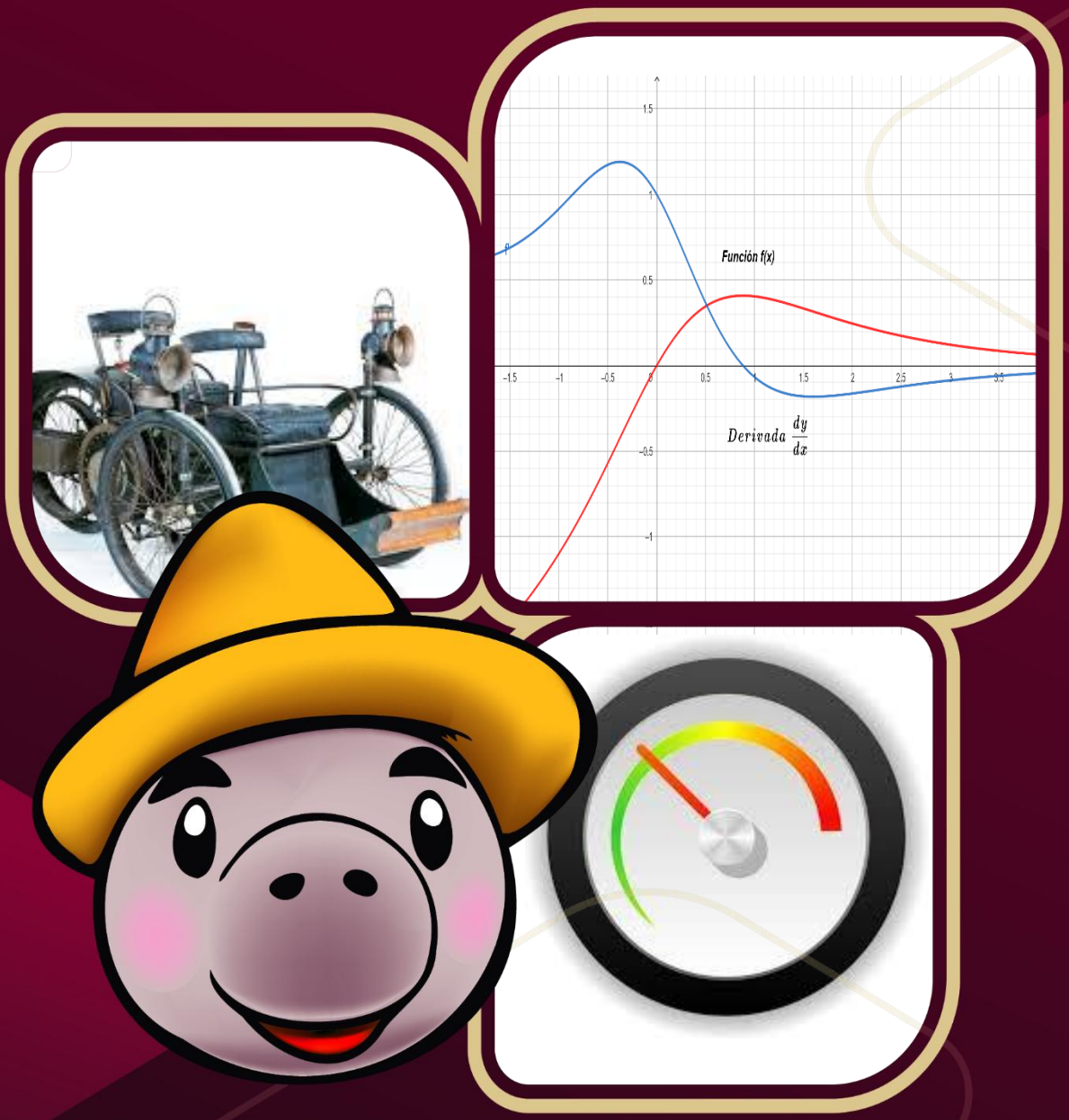
Ícono	Descripción
	Material Didáctico: Recursos físicos o digitales sugeridos para apoyar la comprensión de los contenidos. Pueden ser hojas de trabajo, objetos manipulables, apps o sitios web, entre otros.
	Actividad lúdica: Propuesta de aprendizaje basada en el juego, diseñada para fomentar la participación, la creatividad y la comprensión de los contenidos de forma dinámica y significativa; empleando gamificación o ludificación.
	Retroalimentación: Momento para que el docente brinde comentarios constructivos sobre el desempeño del estudiante, con el fin de fortalecer su proceso de aprendizaje y orientar mejoras.
	Reforzamiento: Actividades propuestas para repasar, practicar o ampliar los contenidos que el estudiante no ha dominado aún. Incluye actividades adicionales o adaptadas para facilitar su comprensión. Se desarrolla durante las “SEMANAS DE REFORZAMIENTO”.
	¿Quién era?: Espacio destinado a presentar la vida y obra de personajes históricos y de aportación relevante y relacionada con el contenido de la UAC. Favorece la conciencia histórica.
	Recordatorio: Nota breve que resalta información importante, fechas clave o instrucciones específicas que el estudiante debe tener presentes durante su trabajo.
	Importante: Indicación destacada de un contenido, concepto o dato que requiere especial atención por su relevancia en la comprensión general del tema.
	COBA-nota: Espacio dedicado a compartir noticias, curiosidades, casos reales o experiencias significativas relacionadas con el contenido, vinculando el aprendizaje con la actualidad.

Encuadre de la UAC

TALLER DE PENSAMIENTO VARIACIONAL I

El encuadre queda en acuerdo de docente y grupo, pueden quitar o agregar.

Icono	Actividad	Puntuación	Porcentaje
	Evaluación Diagnostica		
	Puntualidad y Asistencia		
	Portafolio de actividades (insumos evaluables)		
	Evidencia SIGA (Situación de aprendizaje)		
	Cuestionario tipo PLANEA		
	Examen		
	Metacognición		
		Total	100%



Situación de Aprendizaje 1:

La velocidad ideal: ni tan lento, ni tan rápido

Propósito de la situación

En equipos de cinco integrantes, elaborarán un reporte (digital o físico) que resuelva el conflicto cognitivo planteado, utilizando las reglas de derivada del cociente, del producto y la regla de la cadena, para analizar la eficiencia de combustible del triciclo con adaptación de motor, y presentarlo ante el grupo para su socialización.

Progresiones para desarrollar la SA1

PROGRESION 1	*Aplica* técnicas aritméticas, algebraicas y operaciones funcionales a través del planteamiento de problemáticas de las ciencias, para realizar procesos según lo requiera y adecuar la expresión matemática de manera que el estudiantado analice, compruebe e interprete sus hallazgos y resultados.
PROGRESION 2	*Analiza* de manera formal el concepto de límite, profundizando en el cálculo de límites de funciones mediante sus teoremas, para dar solución a problemáticas contextualizadas de las ciencias utilizando métodos analíticos y/o recursos tecnológicos.
PROGRESION 3	*Analiza* la definición formal de derivada a partir del planteamiento de una situación-problema significativa para el estudiantado que evidencie la variación de una recta secante a la recta tangente, con la cual se puedan obtener las reglas de derivación para calcular derivadas de funciones, empleando en caso de ser necesario recursos tecnológicos.
PROGRESION 4	*Emplea* la regla del producto, la regla del cociente y la regla de la cadena en situaciones-problema provenientes de recursos sociocognitivos y/o áreas del conocimiento, en donde la función que describe el fenómeno de estudio requiere el uso de una de estas reglas.

Metas de Aprendizajes

- **C1M1.** Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos de ciencia y de su entorno.
- **C1M3.** Comprueba los procedimientos usados en la resolución de problemas utilizando diversos métodos, empleando recursos tecnológicos o la interacción con sus pares.
- **C2M1.** Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.
- **C3M1.** Selecciona un modelo matemático por la pertinencia de sus variables y relaciones para explicar una situación, fenómeno o resolver un problema tanto teórico como de su contexto.
- **C3M3.** Aplica procedimientos, técnicas y lenguaje matemático para la solución de problemas propios del pensamiento matemático, de áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno.
- **C4M1.** Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.

POR UNA EDUCACIÓN QUE GENERA CAMBIO

Subcategorías

Conceptual (Conocimientos integradores)	Procedimental (Componentes de áreas sugeridas)	Porcentaje Actitudinal (Dimensiones)
Progresión 1 • **Leyes de los Exponentes** • **Productos Notables** • **Factorización** • **Funciones (Evaluación y Operaciones con Funciones)** • **Fracciones Algebraicas (Operaciones)**	• Aplica las leyes de los exponentes en el desarrollo de productos notables y factorización de expresiones algebraicas. • Resuelve Operaciones con funciones y Fracciones Algebraicas.	• Muestra disciplina al aplicar procedimientos. • Valora el uso y aplicación del álgebra en problemas del cálculo.
Progresión 2 • **Definición de Límite de una Función** • **Enfoque numérico y Gráfico** • **Propiedades de los Límites**	• Comprende el concepto de Límite de una función y lo interpreta de forma numérica y gráfica. • Aplica las Propiedades de los límites y las utiliza en resolución de problemas de contexto real o hipotético.	• Reflexiona sobre la utilidad de las propiedades en situaciones de contexto real o hipotético. • Participa con disposición en el análisis de situaciones contextualizadas.
Progresión 3 • **Definición de derivada (regla de los cuatro pasos, recta tangente, recta secante, interpretación geométrica)**	• Regal de los cuatro pasos • Recta tangente • Recta secante	• Manifiesta perseverancia ante problemas complejos. • Reconoce el valor del análisis detallado y estructurado.
Progresión 4 • **Fórmulas básicas de derivación.** • **Fórmulas de derivadas (producto, cociente y regla de la cadena)**	• Uso de fórmulas de cociente, producto, potencia y reglade la cadena	• Participa activamente en la estimación y evaluación de resultados. •Participa colaborativamente para resolver problemas.

Situación de Aprendizaje

"La velocidad ideal: ni tan lento, ni tan rápido"

Problema del contexto

En muchas comunidades del estado de Tabasco, los triciclos adaptados con motor son un medio de transporte esencial para el traslado de personas, mercancías o incluso como herramienta de trabajo.

Los dueños de estos triciclos con motor, en su mayoría son ellos mismos quienes realizan la adaptación del motor, desconociendo aspectos importantes como la velocidad óptima para maximizar el rendimiento del combustible, si los frenos originales pueden ser suficientes al añadir el motor, la emisión de contaminantes y el ruido excesivo afectando el entorno.

Debido al crecimiento de este transporte, el Colegio de Bachilleres de Tabasco (COBATAB) se ha interesado en realizar un estudio que permita conocer ¿cómo influye la velocidad en la eficiencia del combustible de un triciclo adaptado con motor a gasolina?, utilizando el siguiente modelo matemático

$$\mathbf{E}(x) = \frac{xe^{-0.05x}}{1 + 0.01x^2}$$

Donde:

$$\mathbf{E}(x)\text{: eficiencia en } \frac{km}{\text{lts}}$$

$$x\text{: velocidad en } \frac{km}{hrs}$$

Se ha solicitado a los estudiantes de quinto semestre la elaboración de un reporte con el objetivo de determinar la eficiencia de combustible del triciclo con adaptación de motor. Para ello, deberán considerar lo siguiente:

1. Construye un modelo físico o maqueta de un triciclo adaptado, para comprender cómo la velocidad afecta el rendimiento del combustible. Realiza experimentos o simulaciones sencillas para observar el comportamiento del triciclo.

2. Obtener la representación gráfica de la función de eficiencia de combustible en función de la velocidad, identifica visualmente el intervalo de mayor eficiencia y analiza el comportamiento de la curva utilizando herramientas como GeoGebra.

3. Aplica las reglas de derivación (producto, cociente y cadena) para obtener la función derivada de eficiencia, determina analíticamente el valor de velocidad que maximiza la eficiencia del combustible.

4. Redacta un reporte claro y coherente que explique los resultados obtenidos sobre la velocidad óptima, presentar los resultados mediante una exposición oral sencilla y convincente

5. Finalmente, se llevará a cabo una sesión de preguntas y comentarios entre los equipos, con el fin de compartir ideas y mejorar el trabajo en conjunto, fomentando el diálogo y la retroalimentación constructiva.

Conflicto cognitivo

1. Representa mediante una gráfica la función matemática del modelo de la eficiencia de combustible, ¿En qué intervalo la velocidad parece que la eficiencia es mayor?

2. ¿Cómo se comporta la eficiencia del combustible del triciclo, si el conductor mantiene una velocidad de 4, 6, 8 y 10 km/h?

3. ¿Cómo podemos saber a qué velocidad el vehículo consume menos gasolina por kilómetro?, ¿A qué velocidad del triciclo se da la mayor eficiencia de combustible y cuál es el valor de dicha eficiencia?

4. ¿Cómo cambia la eficiencia si aumentamos o disminuimos la velocidad?

5. ¿Además de la velocidad, qué otros aspectos importantes crees que afectan la eficiencia de combustible del triciclo?

Instrumento de Evaluación Situación de Aprendizaje 1

TPV1-SA1-RU01 Rúbrica para evaluar la Situación de Aprendizaje 1

COLEGIO DE BACHILLERES DE TABASCO PLANTEL No. _____

TALLER DE PENSAMIENTO VARIACIONAL I

Datos de identificación			**TPV1-SA1-RU01**
Situación didáctica	**"La velocidad ideal: ni tan lento, ni tan rápido"**	**Progresiones**	1,2,3,4
Propósito de la situación	En equipos de cinco integrantes, elaborarán un reporte (digital o físico) que resuelva el conflicto cognitivo planteado, utilizando las reglas de derivada del cociente, del producto y la regla de la cadena, para analizar la eficiencia de combustible del triciclo con adaptación de motor, y presentarlo ante el grupo para su socialización		

CATEGORIAS/SUBCATEGORIAS	
CATEGORIAS	**SUBCATEGORIAS**
C1 Procedural	**C1S1** Elementos aritméticos algebraicos **C1S2** Elementos geométricos **C1S3** Elementos variacionales C1S4 manejo de datos 3
C2 Procesos de intuición y razonamiento	**C2S1** Capacidad para observar y conjeturar **C2S2** Pensamiento intuitivo **C2S3** Pensamiento formal
C3 Solución de problemas y modelación	**C3S1** Uso de modelos **C3S2** Pensamiento intuitivo y construcción de modelos **C3S3** Estrategias heurísticas y ejecución de procedimientos no rutinarios C3S4 Manejo de datos e incertidumbre
C4 Interacción y lenguaje matemático	**C4S1** Registro escrito, simbólico, algebraico e iconográfico

Nombre de los alumnos			Grupo	
	N. Lista:			N. Lista:
	N. Lista:			N. Lista:
	N. Lista:			N. Lista:

Evaluación					
CATEGORÍAS	**Puntuación obtenida**	**Puntuación máxima**	**Ponderación**	**Retroalimentación**	
C1. Procedural		**4**	**20%**	**Logros**	
C2. Procesos De intuición y razonamiento		**4**	**20%**		
C3. Soluciones de problemas y modelación		**4**	**20%**		
C4. Interacción y lenguaje matemático		**4**	**20%**	**Aspectos de mejora**	
Actitudinal		**4**	**20%**		
TOTAL		**30**	**100%**		
Calificación obtenida					

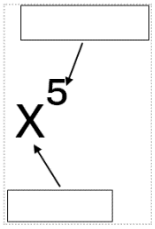
Categoría	NIVEL DE PROGRESO			
	Destacado (4)	Competente (3)	Básico (2)	No presenta (1)
C1. Procedural	Identifica y clasifica todas las variables y constantes para asociarlas creando modelos matemáticos previos completos y exactos.	Identifica y clasifica varias variables y constantes para asociarlas creando modelos matemáticos previos correctos.	Asocia algunas variables y constantes para crear modelos matemáticos previos limitados en precisión.	Asocia pocas variables y constantes para crear modelos matemáticos previos incorrectos.
C2. Solución de problemas y modelación	Asocia modelos preliminares con precisión, reconociendo la necesidad de expresar la máxima eficiencia en combustible y aplica correctamente las fórmulas de derivación.	Asocia modelos preliminares adecuadamente, reconociendo la necesidad de expresar la máxima eficiencia en combustible y aplica correctamente la mayoría de las fórmulas de derivación.	Asocia modelos preliminares de manera básica, de expresar la máxima eficiencia en combustible y aplica correctamente algunas de las fórmulas de derivación.	Tiene dificultades para asociar modelos preliminares y no comprende la necesidad de expresar la máxima eficiencia en combustible . Aplica incorrectamente las fórmulas de derivación.
C3. Interacción y lenguaje matemático	Domina la aplicación precisa de las fórmulas de derivada, evaluando en un punto, y su interpretación, selecciona adecuadamente los modelos para resolver el conflicto cognitivo.	Aplica correctamente las fórmulas de derivada, evaluando en un punto, y su interpretación y selecciona modelos adecuados en la mayoría de las preguntas del conflicto cognitivo.	Intenta aplicar los fórmulas de derivada, evaluando en un punto, y seleccionar modelos para resolver algunas preguntas del conflicto cognitivo, aunque con algunas dificultades y limitaciones.	Tiene varias dificultades en la aplicación de las fórmulas de derivada y la evaluación en un punto y la selección de modelos para resolver el conflicto cognitivo.
C4. Interacción y lenguaje matemático	Expresa correctamente la derivada y reconoce con precisión las unidades adecuadas en todo momento, mostrando comprensión completa y habilidad técnica.	Expresa adecuadamente la derivada en la mayoría de los casos y reconoce las unidades apropiadas en la mayoría de las situaciones, con algunos errores ocasionales.	Expresa la derivada con ciertas dificultades en algunos casos, reconociendo las unidades correctas en algunas situaciones, aunque con limitaciones y posibles errores.	Tiene dificultades para expresar correctamente la derivada y comprender las unidades adecuadas para su resultado.
Actitudinal	Trabaja de forma altamente colaborativa, con explicaciones claras y una gran disposición al trabajo organizado y metódico, cumpliendo con todos los criterios del docente.	Trabaja de forma colaborativa, con explicaciones claras y una disposición adecuada al trabajo organizado y metódico, cumpliendo la mayoría de los criterios del docente.	Se relaciona de manera limitada, con explicaciones comprensibles pero algunas imprecisiones, y una disposición inconsistente al trabajo organizado, cumpliendo solo algunos criterios del docente.	Tiene una mínima interacción con sus pares, presentando explicaciones poco claras, una disposición limitada al trabajo organizado, y no cumple con la mayoría de los criterios del docente.

TPV1-SA1-ED01 Evaluación Diagnóstica

Nombre_____ Grupo_____

Instrucciones: Subraya el inciso que corresponda a la respuesta correcta.

1.- Una potencia es una expresión que está formada por una base y un exponente. Indica la base y el exponente en la siguiente potencia.



2.- El resultado correcto de la siguiente operación $\frac{(12x^3y^2)^2}{(4x^2y^3)}$ **es:**

a) $36x^4y$

b) $\frac{3x}{y}$

c) $8xy^2$

d) $36x^2y$

3.- El recíproco de un número x **es** $\frac{1}{x}$**. Por ejemplo, el recíproco de** 2 **es** $\frac{1}{2} = 0.5$**. Cuando se obtiene el recíproco de un número muy muy grande, ¿Qué sucede con su valor?**

a) También crece

b) Es el mismo

c) Tiende a cero.

d) Desaparece.

4.- Usando el resultado del ejercicio anterior, deduce que sucede con $\frac{1}{x^2}$ **si** $x = 100$ **.**

a) También crece y su valor es 10000

b) Es el mismo y su valor es 100

c) Tiende a cero y su valor es 0.0001

d) Desaparece y su valor es cero

5.- El resultado de desarrollar el siguiente binomio al cuadrado: $(2x+1)^2$ **es:**

a) $2x^2+1$

b) $4x^2+1$

POR UNA EDUCACIÓN QUE GENERA CAMBIO

c) $4x^2 + 2x + 1$

d) $4x^2 + 4x + 1$

6.- Factoriza la siguiente diferencia de cuadrados: $1 - x^2$

a) $x(1 - x)$

b) $(1 - x)(1 + x)$

c) $(1 - x)^2$

d) $(1 - x)^2(1 + x)$

7.- ¿Cuál es el objetivo principal de la regla de los cuatro pasos en cálculo diferencial?

a) Resolver ecuaciones algebraicas.

b) Encontrar la pendiente de una recta.

c) Calcular el límite de una función.

d) Determinar la derivada de una función usando su definición.

8.- La derivada de una función $f(x)$ en un punto representa:

e) El valor máximo de la función.

f) El área bajo la curva.

g) La razón de cambio instantánea en ese punto.

h) La pendiente promedio entre dos puntos.

9.- Selecciona la técnica de derivación más adecuada para resolver:

$$f(x) = \frac{(x^2 + 1)e^x}{\tan x}$$

a) Sólo regla del producto

b) Regla del producto y de la cadena

c) Regla del producto y del cociente

d) Regla del cociente y de la cadena

10.- ¿Cuál de las siguientes funciones necesita usar la regla de la cadena para derivarse?

a) $f(x) = x^3$

b) $f(x) = In\ x$

c) $f(x) = \cos(3x)$

d) $f(x) = 5x^2$

Progresión 1

Aplica técnicas aritméticas, algebraicas y operaciones funcionales a través del planteamiento de problemáticas de las ciencias, para realizar procesos según lo requiera y adecuar la expresión matemática de manera que el estudiantado analice, compruebe e interprete sus hallazgos y resultados

Metas de Aprendizaje	Categorías	Subcategorías
C1M1. C1M1. Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos de ciencia y de su entorno.	**C2.** Procedural	**S1.** Elementos aritméticos algebraicos
C4M1. Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.	**C4.** Interacción y lenguaje matemático	**S1.** S1. Registro escrito, simbólico, algebraico e iconográfico

Lectura: Leyes de los Exponentes

Definición

Comenzamos esta lectura enunciando las leyes de los exponentes y para ello, antes recordaremos la definición de potencia. Una potencia es una expresión algebraica que consta de una base y un exponente, por ejemplo, la expresión x^2 es una potencia cuya base es la literal x y el exponente es 2. Por el momento consideraremos solo exponentes enteros positivos. El significado de una potencia es bastante simple, significa multiplicar la base por sí misma tantas veces como el exponente lo indique:

$$x^2 = x \cdot x$$

$$x^3 = x \cdot x \cdot x = x^2 \cdot x$$

Y así sucesivamente.

Las potencias 0 y 1 se definen así:

$$\boldsymbol{x^0 = 1}$$

$$\boldsymbol{x^1 = x}$$

A continuación, enunciaremos las tres leyes principales de los exponentes, las cuales nos permiten realizar operaciones entre monomios y polinomios, resolver ecuaciones y, como veremos más adelante, será útil en la simplificación de derivadas de potencias.

Primera Ley. Cuando se multiplican potencias de la misma base, el resultado es una potencia de la base en cuestión y cuyo exponente es la suma de los exponentes de las potencias.

$$\boldsymbol{x^n . x^m = x^{n+m}}$$

Ejemplo: $x^2 x^3 = x^{2+3} = x^5$

POR UNA EDUCACIÓN QUE GENERA CAMBIO

Segunda Ley. Cuando se dividen potencias de la misma base, el resultado es una potencia de la base en cuestión y cuyo exponente es la resta de los exponentes de las potencias.

$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$$

Ejemplo:

$$\frac{x^8}{x^4} = x^{8-4} = x^4$$

Tercera Ley. Cuando una potencia es elevada a un exponente, el resultado es otra potencia cuya base es la misma y el exponente es la multiplicación de los exponentes involucrados.

$$(x^m)^n = x^{mn}$$

Ejemplo: $(a^2)^3 = a^6$.

Potencias enteras y fraccionarias. Definimos las potencias de exponentes enteros negativos y fraccionarios como sigue:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

donde n es un entero positivo.

Ejemplo $y^{-3} = \frac{1}{y^3}$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

donde m y n son enteros positivos.

Ejemplo: $\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$, $\frac{1}{\sqrt[5]{x^3}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{5}}} = x^{-\frac{3}{5}}$

Las tres leyes antes descritas son válidas también para potencias enteras y fraccionarias, de hecho, lo son para todo número real. Se presentan a continuación algunos ejemplos de operaciones con monomios.

Ejemplos de aplicación

1. Calcular $\boldsymbol{(9x^3y^4)(3xy^2)}$.

$(9x^3y^4)(3xy^2) = (9 \cdot 3) \cdot (x^3 \cdot x^1) \cdot (y^4 \cdot y^2)$.

$(9x^3y^4)(3xy^2) = 27 \cdot x^4y^6$.

2. Calcular $\boldsymbol{\frac{9x^3y^4}{3xy^2}}$

$\frac{9x^3y^4}{3xy^2} = \frac{9}{3}\, x^{3-1}y^{4-2} = 3x^2y^2$.

3. Calcular $\boldsymbol{(9a^3b^4)^3}$

$(9a^3b^4)^3 = 9^3(a^3)^3(b^4)^3$.

$(9a^3b^4)^3 = 729a^9b^{12}$.

4. Calcular $\boldsymbol{\sqrt[3]{27x^9y^6}}$

$$\sqrt[3]{27x^9y^6} = \sqrt[3]{27}\sqrt[3]{x^9}\sqrt[3]{y^6}$$

$$\sqrt[3]{27x^9y^6} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{x^9} \cdot \sqrt[3]{y^6} = 3x^{\frac{9}{3}}y^{\frac{6}{3}}$$

$$\sqrt[3]{27x^9y^6} = 3x^3y^2$$

5. Calcular $\boldsymbol{\frac{x^3}{x^6}}$

$$\frac{x^3}{x^6} = x^{3-6}$$

$$\frac{x^3}{x^6} = x^{-3}$$

$$\frac{x^3}{x^6} = \frac{1}{x^3}$$

Recurso audiovisual

Puedes seguir repasando estos temas para reforzar tus aprendizajes, visitando el siguiente enlace

http://objetos.unam.mx/matematicas/leccionesMatematicas/01/1_036/index.html o con el código:

Lectura: Productos Notables.

Definición

Una de las herramientas más indispensables para el estudio del pensamiento variacional, son los temas de productos notables, factorización y operaciones con funciones polinomiales y racionales, así como el análisis de las propiedades de éstas.

Comencemos con el tema de los Productos Notables. Entendemos a los Productos Notables como aquellos productos de expresiones algebraicas, cuyo resultado se puede obtener por simple inspección, sin necesidad de realizar el procedimiento paso a paso de la multiplicación. Dicho resultado se obtiene al aplicar una propiedad fundamental de los números reales: La propiedad distributiva, la cual es una de las propiedades fundamentales del álgebra, la cual se aplica al operar simultáneamente con suma y multiplicación:

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$$

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}$$

En donde el signo de $+$ significa suma y el punto $\cdot$ significa multiplicación. Generalmente ya no se usa el punto ni ningún otro símbolo para la multiplicación, mientras no haya peligro de confusión, quedando así

$a(b+c) = ab + ac$ ----------primera forma

$(a+b)c = ac + bc$ ----------segunda forma

De esta propiedad distributiva se desprenden los productos notables más usados:

Producto de binomios conjugados: $\boldsymbol{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$

Binomio al cuadrado: $\boldsymbol{(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2}$

Binomio al cubo: $\boldsymbol{(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2}$

Producto de binomios con un término común: $\boldsymbol{(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab}$

Para observar como la propiedad distributiva (P.D.) desarrolla los productos notables, veamos la demostración del producto de binomios conjugados.

$(a+b)c = ac + bc$, con $c = a - b$ usando la segunda forma de la P.D.

$$(a+b)(a-b) = a(a-b) + b(a-b)$$

$(a+b)(a-b) = a\big(a+(-b)\big) + b\big(a+(-b)\big)$, recordando la definición de resta $a - b = a + (-b)$

$(a+b)(a-b) = a^2 + a(-b) + ba + b(-b)$ aplicando la primera forma de la P.D.

$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ba - bb$, recordando que $x(-y) = -xy$

$(a+b)(a-b) = a^2 + ab - ab - b^2$, porque el orden los factores no altera el producto.

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, por la propiedad del inverso aditivo $(x - x = 0)$

De manera similar se pueden demostrar la expresión para el resto de los productos notables. Veamos un ejemplo de cada uno de estos productos notables.

Producto de binomios conjugados: $\boldsymbol{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$

Calcular $(1-2t)(1+2t)$

$(1-2t)(1+2t) = 1^2 - (2t)^2$

$(1-2t)(1+2t) = 1^2 - 2^2t^2$

$(1-2t)(1+2t) = 1^2 - 4t^2$

Producto de binomios con un término común: $(x+a)(x-b) = x^2 + (a+b)x + ab$

Calcular $(x-2)(x-3)$

$(x-2)(x-3) = x^2 + \big(-2+(-3)\big)x + (-2)(-3)$

$(x-2)(x-3) = x^2 + (-5)x + 6$

$(x-2)(x-3) = x^2 - 5x + 6$

Binomio al cuadrado: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

Calcular $(2x-3y)^2$

$(2x-3y)^2 = (2x)^2 - 2(2x)(3y) + (3y)^2$

$(2x-3y)^2 = 2^2x^2 - 12xy + 3^2y^2$

$(2x-3y)^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2$

Binomio al cubo: $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

Calcular $(2x-3y)^3$

$(2x-3y)^3 = (2x)^3 - 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y)^2 + (3y)^3$

$(2x-3y)^3 = 2^3x^3 - 3 \cdot 2^2x^2(3y) + 3(2x)3^2y^2 + 3^3y^3$

$$(2x-3y)^3 = 8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$$

POR UNA EDUCACIÓN QUE GENERA CAMBIO

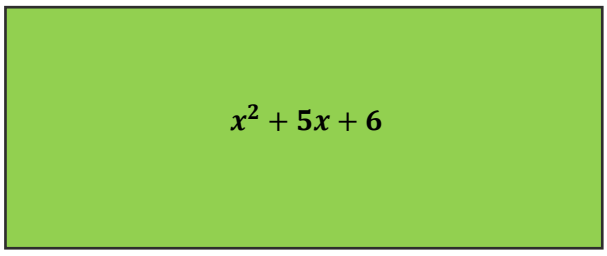
Estudio independiente. ¡Para saber más!:

¿Te has preguntado cómo sería el desarrollo de un binomio elevado a una potencia cualquiera?, Bueno, existe un método general llamado teorema del binomio que te permite hacerlo. Accede mediante el siguiente código para saber más de este tópico o da clic aquí

Lectura: Factorización

Definición

Supongamos que el área de terreno rectangular está dada por la expresión algebraica $x^2 + 5x + 6$ y se requiere colocar malla en todo su perímetro ¿Cuál sería la expresión que determina la medida de los lados del rectángulo y el perímetro?



La factorización es el proceso de descomponer una expresión algebraica en factores más simples, de tal manera que el producto de esos factores sea la expresión original. La factorización es el procedimiento inverso al desarrollo de algunos productos y de los productos notables vistos anteriormente en esta guía.

Presentamos algunos métodos para factorizar un polinomio.

FACTOR COMÚN

Se encuentra un factor común a todos los términos de la expresión, es necesario encontrar el **MÁXIMO FACTOR COMÚN (MFC)**, $\boldsymbol{ax^n}$, donde $\boldsymbol{a}$ es el máximo común divisor (MCD) de los coeficientes de los términos y $\boldsymbol{n}$ es el mínimo exponente de $\boldsymbol{x}$ (la parte literal, pueden ser varias literales comunes) en todos los términos del polinomio.

Ejemplo: Factoriza $\boldsymbol{6x^3 + 18x^2}$

Solución. Debemos encontrar el Máximo Factor Común ax^n de $\boldsymbol{6x^3 + 18x^2}$

Donde a es máximo común divisor de los coeficientes

x^n es la variable con el menor de los exponentes.

1. Calculamos el valor a del Máximo común divisor MCD de los coeficientes.

En este caso obtenemos el MCD de 6 y 18

6	18	2	Entonces el valor de $a = 2(3) = 6$
3	9	3	
1	3		

2. Variable común con el menor exponente.

Entre la variable x^3 y x^2, la que tiene el menor exponente es x^2

3. Formamos el Máximo Factor común es $ax^n = 6x^2$

4. Dividir el polinomio $\boldsymbol{6x^3 + 18x^2}$ entre el Máximo Factor Común $6x^2$

$$\frac{\boldsymbol{6x^3+18x^2}}{6x^2} = \frac{\boldsymbol{6x^3}}{\boldsymbol{6x^2}} + \frac{\boldsymbol{18x^2}}{\boldsymbol{6x^2}} = \boldsymbol{1x^{3-2} + 3x^{2-2} = x + 3x^0 = x + 3(1) = x + 3}$$

5. El polinomio $\boldsymbol{6x^3 + 18x^2}$ quedará factorizado por el Máximo factor común $2x^2$ y por el resultado de la división $\boldsymbol{x + 3}$

$$\boldsymbol{6x^3 + 18x^2 = (6x^2)(x + 3)}$$

Ejemplo: Factoriza $\boldsymbol{6x^3y^2 + 8x^2y^3 - 2xy^4}$

Solución. Encontrar el Máximo Factor Común ax^n de $6x^3y^2 + 8x^2y^3 - 2xy^4$

Donde a es máximo común divisor de los coeficientes

x^n es la variable con el menor de los exponentes.

1. Calculamos el valor a del Máximo común divisor MCD de los coeficientes, en este caso de 6, 8 y 2

6	8	2	2
3	4	1	

Entonces el valor de $a = 2$

2. Las variables comunes con el menor exponente.

En este son dos variables x y y en el polinomio.

De los términos x^3, x^2, x, la de menor exponente es x

Para la variable y tenemos y^2, y^3, y^4, la de menor exponente es y^2

3. Formamos el Máximo Factor común está integrado por el término $ax^n = 2xy^2$

4. Dividir el polinomio $\boldsymbol{6x^3y^2 + 8x^2y^3 - 2xy^4}$ entre el Máximo Factor Común $2xy^2$

$$\frac{6x^3y^2 + 8x^2y^3 - 2xy^4}{2xy^2} = \frac{6x^3y^2}{2xy^2} + \frac{8x^2y^3}{2xy^2} - \frac{2xy^4}{2xy^2}$$

$$= 3x^{3-1}y^{2-2} + 4x^{2-1}y^{3-2} - 1x^{1-1}y^{4-2}$$

$$= 3x^2y^0 + 4xy - x^0y^2$$

$$= 3x^2(1) + 4xy - (1)y^2 = 3x^2 + 4xy - y^2$$

5. El polinomio $\boldsymbol{6x^3y^2 + 8x^2y^3 - 2xy^4}$ quedará factorizado por el Máximo factor común $\boldsymbol{2xy^2}$ y por el resultado de la división $\boldsymbol{3x^2 + 4xy - y^2}$

$$\boldsymbol{6x^3y^2 + 8x^2y^3 - 2xy^4 = (2xy^2)(3x^2 + 4xy - y^2)}$$

Ejemplo. Factoriza la expresión $6x^5e^{2x} - 9x^4e^{2x} + 12x^3e^{2x} - 15x^2e^{2x}$ **por factor común**

1. Identificar el MCD de los coeficientes 6,9,12,15, en este caso corresponde a 3

POR UNA EDUCACIÓN QUE GENERA CAMBIO

2. La potencia de menor exponente de las variables x^5, x^4, x^3, x^2 es x^2

3. Se observa que también e^{2x} es un término común en la expresión, entonces el Máximo Factor Común es $3x^2e^{2x}$

4. Dividir el $6x^5e^{2x} - 9x^4e^{2x} + 12x^3e^{2x} - 15x^2e^{2x}$ entre el factor $3x^2e^{2x}$

$$\frac{6x^5e^{2x}-9x^4e^{2x}+12x^3e^{2x}-15x^2e^{2x}}{3x^2e^{2x}} = \frac{6x^5e^{2x}}{3x^2e^{2x}} - \frac{9x^4e^{2x}}{3x^2e^{2x}} + \frac{12x^3e^{2x}}{3x^2e^{2x}} - \frac{15x^2e^{2x}}{3x^2e^{2x}}$$

$$= 2x^3 - 3x^2 + 4x - 5$$

5. La factorización es

$$\boldsymbol{6x^5e^{2x} - 9x^4e^{2x} + 12x^3e^{2x} - 15x^2e^{2x} = (3x^2e^{2x})(2x^3 - 3x^2 + 4x - 5)}$$

FACTORIZACIÓN POR AGRUPACIÓN

Hay ocasiones en que un polinomio no tiene en todos sus términos un factor común, para ello se ocupa la propiedad asociativa para poder factorizarlo.

Ejemplo: Factorizar $x^3 + 2x^2 + 3x + 6$ por agrupación

Solución.

1. Aplicamos propiedad asociativa, agrupamos entre paréntesis los términos que tengan factor común

$$\boldsymbol{x^3 + 2x^2 + 3x + 6 = (x^3 + 2x^2) + (3x + 6)}$$

2. Factorizamos por término común cada agrupación

Factorizamos $x^3 + 2x^2$	**Factorizamos $3x + 6$**
1.El MCD es 1 2. El factor común de la variable con menor exponente es x^2 3. Dividir al polinomio $x^3 + 2x^2$ entre $1x^2 = x^2$ $\frac{x^3+2x^2}{x^2} = \frac{x^3}{x^2} + \frac{2x^2}{x^2} = x + 2$ 4. La factorización queda $(x^3 + 2x^2) = x^2(x + 2)$	1. Se obtiene el MCD de 3 y 6 3 6 | 3 1 2 2. No hay variable común con el menor exponente. 3. Dividir el polinomio $3x + 6$ entre 3 $\frac{3x+6}{3} = \frac{3x}{3} + \frac{6}{3} = x + 2$ 4. La factorización queda $3x + 6 = 3(x + 2)$

3. Sustituimos las factorizaciones de $(x^3 + 2x^2) = x^2(x + 2)$ y $3x + 6 = 3(x + 2)$

$$x^3 + 2x^2 + 3x + 6 = (x^3 + 2x^2) + (3x + 6) = x^2(x + 2) + 3(x + 2)$$

4. Observamos el término común que aparece

$x^3 + 2x^2 + 3x + 6 = (x^3 + 2x^2) + (3x + 6)$

$= x^2(x + 2) + 3(x + 2)$ observamos que se repite $(x + 2)$

Factorizamos $(x + 2)$

POR UNA EDUCACIÓN QUE GENERA CAMBIO

$= (x + 2)(x^2 + 3)$

5. La factorización es $x^3 + 2x^2 + 3x + 6 = (x + 2)(x^2 + 3)$

FACTORIZACIÓN DE TRINOMIO CUADRADO PERFECTO (TCP)

Este método se aplica para aquellos trinomios cuadrados que, al ordenarlos, cumplen las siguientes dos características:

1. El primer y el ultimo término tienen raíz cuadrada.

2. Observar que el segundo término del trinomio sea el doble del producto de esas raíces cuadradas.

Si las dos características anteriores se cumplen entonces el trinomio es un trinomio cuadrado perfecto y su factorización es un binomio al cuadrado, cuyos dos términos son las raíces cuadradas del primer y el último término.

La expresión correspondiente a la factorización de un TCP resulta ser un binomio al cuadrado, y queda de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2}$$

Ejemplo: Factoriza el trinomio $\boldsymbol{x^2 + 2xy + y^2}$

Solución.

1. Observar si el primer y último término tienen raíces cuadradas, si no cumple, entonces se reordena y se comprueba de nuevo.

$\boldsymbol{x^2 + 2xy + y^2}$ Obtenemos las raíces cuadradas del primer y último término

$$\sqrt{x^2} = x \quad \text{y} \quad \sqrt{y^2} = y$$

2. Revisamos si el doble producto de ambas raíces da como resultado el segundo término del trinomio $\boldsymbol{x^2 + 2xy + y^2}$,

$$2(x)(y) = 2xy$$

3. El polinomio $x^2 + 2xy + y^2$ es un trinomio cuadrado perfecto. El binomio al cuadrado se forma con ambas raíces, para obtener así la factorización del trinomio.

$$\underbrace{x^2 + 2xy + y^2}_{} = (x + y)^2$$

El signo lo determina el signo del segundo término del Trinomio

Ejemplo: Factoriza el trinomio $4x^2 - 20x + 25$

Solución.

1. Observa si el primer y último término tienen raíces cuadradas, si no cumple, entonces se reordena y se comprueba de nuevo.

$4x^2 - 20x + 25$ Obtenemos las raíces cuadradas del primer y último término.

$\sqrt{4x^2} = 2x$ y $\sqrt{25} = 5$

2. Revisamos si el doble producto de ambas raíces da como resultado el segundo término del trinomio $4x^2 - 20x + 25$

$$2(2x)(5) = 20x$$

3. El polinomio $4x^2 - 20x + 25$ es un trinomio cuadrado perfecto. El binomio al cuadrado se forma con ambas raíces para obtener así la factorización del trinomio

$$\underbrace{4x^2 - 20x + 25}_{} = (2x - 5)^2$$

El signo lo determina el signo del segundo término del Trinomio

FACTORIZACIÓN DE UNA DIFERENCIA DE CUADRADOS

Una diferencia de cuadrados resulta ser una resta de expresiones cuadráticas, su factorización resulta ser un producto de binomios conjugados, quedando una expresión de la forma

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Ejemplo. Factoriza $x^2 - 9$

Solución. Para factorizar $x^2 - 9$ se obtiene las raíces cuadradas de ambos términos

$\sqrt{x^2} = x$ y $\sqrt{9} = \pm 3$

Entonces la factorización es

$$x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$$

Ejemplo. Factoriza $9x^8 - 25y^4$

Solución. Para factorizar $9x^8 - 25y^4$ se obtiene las raíces cuadradas de ambos términos

$\sqrt{9x^8} = 3x^4$ y $\sqrt{25y^4} = 5y^2$

Entonces la factorización es

$$9x^8 - 25y^4 = (3x^4 + 5y^2)(3x^4 - 5y^2)$$

FACTORIZACIÓN DE TRINOMIOS DE LA FORMA $x^2 + bx + c$

Cuando en un trinomio de la forma $\boldsymbol{x^2 + bx + c}$, el coeficiente del término cuadrático es 1, y el trinomio no es cuadrado perfecto, como en el caso anterior, la factorización es a la inversa del producto notable llamado "producto de dos binomios con un término común". La expresión factorizada queda de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{x^2 + bx + c = (x + a)(x + d)}$$

Ejemplo: Factoriza el trinomio $x^2 + 14x + 24$

Solución.

$x^2 + 14x + 24$ No es un trinomio cuadrado perfecto, debido a que 24 no tiene raíz cuadrada exacta

$x^2 + 14x + 24$ Observamos que el término cuadrático tiene coeficiente 1

POR UNA EDUCACIÓN QUE GENERA CAMBIO

La factorización será $x^2 + 14x + 24 = (x + a)(x + d)$

Para encontrar los valores de "a" y "d" buscamos dos números que al multiplicarlos se obtenga el término constante $ad = 24$ y que sumados se obtenga el coeficiente del término lineal $a + d = 14$

$$\boldsymbol{x^2 + 14x + 24}$$

Esos mismo dos números que sumados se obtenga +14

Buscamos dos números que multiplicados se obtenga 24

Los números que buscamos y que cumplan estas condiciones pueden ser

Sumados se obtenga 14	**Multiplicados se obtenga 24**
(1)+(24)=25	(1)(24)=24
(2)+(12)=14	**(2)(12)=24**
(3)+(8)= 11	(3)(8)=24
(4)+(6)=10	(4)(6)=24

Los números que cumplen las condiciones son 2 y 12

Multiplicados $ad = (2)(12) = 24$ y sumados se obtenga $a + d = 2 + 12 = 14$

Entonces $\boldsymbol{a = +2}$ **y** $\boldsymbol{d = +12}$**,** la factorización del trinomio $\boldsymbol{x^2 + 14x + 24}$ es

$$\boldsymbol{x^2 + 14x + 24 = (x + a)(x + d) = (x + 2)(x + 12)}$$

Ejemplo: Factoriza el trinomio $x^2 - 6x - 27$

Solución.

$x^2 - 6x - 27$ No es un trinomio cuadrado perfecto, debido a que 27 no tiene raíz cuadrada exacta.

. $x^2 - 6x - 27$ El término cuadrático tiene coeficiente 1

La factorización será $x^2 - 6x - 27 = (x + a)(x + d)$

Buscamos los valores de "a" y "d" de la siguiente manera:

Dos números que al multiplicarlos se obtenga el término constante $ad = -27$ y que sumados se obtenga el coeficiente del término lineal $a + d = -6$.

$x^2 - 6x - 27$

Esos mismos dos números que sumados se obtenga - 6

Buscamos dos números que multiplicados se obtenga - 27

Los números que buscamos y que cumplan estas condiciones pueden ser:

Sumados se obtenga -6	**Multiplicados se obtenga -27**
(1)+(-27)= - 26	(1)(-27)= - 27
(-1)+(27)= 26	(-1)(27)= - 27
(3)+(- 9)= - 6	**(3)(-9)= - 27**
(-3)+(9)= 6	(-3)(9)= - 27

Los números que cumplen son 3 y –9, ya que multiplicados es $ad = (3)(-9) = -27$ y sumados se obtenga $a + d = (3) + (-9) = -6$.

Cumple las dos condiciones entonces $\boldsymbol{a = 3\ y\ d = -9}$

Por lo tanto, la factorización del trinomio es

$$\boldsymbol{x^2 - 6x - 27 = (x + a)(x + d) = (x + 3)(x - 9)}$$

Estudio independiente. ¡Para saber más!:

FACTORIZACIÓN DE UN TRINOMIO DE LA FORMA $ax^2 + bx + c$

Para factorizar un trinomio de la forma $\boldsymbol{ax^2 + bx + c}$, donde el coeficiente a es diferente de 1 y no es un trinomio cuadrado perfecto, se sigue el siguiente procedimiento:

1. Se multiplican los términos de la expresión por el coeficiente $\boldsymbol{a}$.

2. Se expresa el primer término en forma de cuadrado $\boldsymbol{(ax)^2}$.

3. Para el segundo término se intercambia el coeficiente $\boldsymbol{a}$ por $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b(ax)}$.

4.- El tercer término será el producto $\boldsymbol{ac}$

4. La factorización de la nueva expresión se tratará como se hizo para la forma $\boldsymbol{x^2 + bx + c}$, es decir, se buscan dos números que multiplicados se obtenga el producto $\boldsymbol{ac}$ y que sumados se obtenga el coeficiente $\boldsymbol{b}$.

5. Se divide el resultado de la factorización entre $\boldsymbol{a}$, de forma que no quede ningún cociente.

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c} \qquad \boldsymbol{\frac{a(ax^2 + bx + c)}{a}}$$

$$\boldsymbol{\frac{a(ax^2) + a(bx) + a(c)}{a}} \qquad \boldsymbol{\frac{(ax)^2 + b(ax) + ac}{a}}$$

La suma de los dos números sea b

Necesitamos dos números cuyo producto sea ac

POR UNA EDUCACIÓN QUE GENERA CAMBIO

Ejemplo: Factoriza el trinomio $\mathbf{3x^2 - 11x + 6}$

Solución.

Se ordenan los términos en la forma $ax^2 + bx + c$, posteriormente se multiplica y se divide por el coeficiente del término cuadrático, en el caso del segundo término solo se deja indicada la multiplicación.

Se multiplica y se divide la expresión por el termino $a = 3$

$\mathbf{3x^2 - 11x + 6 = \frac{3(3x^2 - 11x + 6)}{3}}$ Se aplica la ley distributiva

$\mathbf{= \frac{3(3x^2) - 3(11x) + 3(6)}{3}}$ Se acomodan términos y se realiza el producto

$\mathbf{= \frac{(3x)^2 - 11(3x) + 18}{3}}$ Se factoriza de la forma $x^2 - bx + c$

Dos números que multiplicados se obtenga 18 y sumados -11

En este caso son (-9)(-2)=18 y (-9)+(-2)=-11

$\mathbf{= \frac{(3x - 9)(3x - 2)}{3}}$ Se obtiene un factor común de cada binomio

$\mathbf{= \frac{3(x - 3)(3x - 2)}{3}}$ Se simplifica la fracción

$\mathbf{= (x - 3)(3x - 2)}$ Por lo tanto, $\mathbf{3x^2 - 11x + 6 = (x - 3)(3x - 2)}$

Ejemplo: Factoriza el trinomio $\mathbf{6x^2 + 7x - 5}$

Solución.

Se ordenan los términos en la forma $ax^2 + bx + c$ se multiplica y se divide por el coeficiente del término cuadrático, en el caso del segundo término solo se deja indicada la multiplicación.

POR UNA EDUCACIÓN QUE GENERA CAMBIO

Se multiplica y se divide la expresión por el termino $a = 6$

$\mathbf{6x^2 + 7x - 5} = \frac{\mathbf{6(6x^2+7x-5)}}{\mathbf{6}}$ Se aplica la ley distributiva

$= \frac{\mathbf{6(6x^2)+6(7x)-6(5)}}{\mathbf{6}}$ Se acomodan términos y se realiza el producto

$= \frac{\mathbf{(6x)^2+7(6x)-30}}{\mathbf{6}}$ Se factoriza de la forma $x^2 - bx + c$

Dos números que multiplicados se obtenga -30 y sumados +7

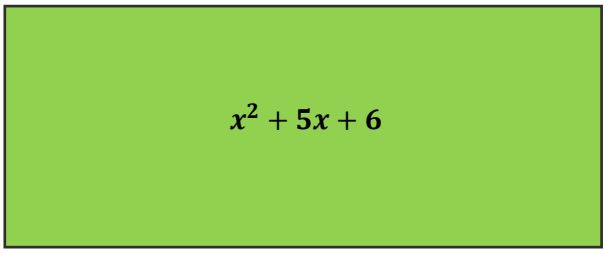
$= \frac{\mathbf{(6x+10)(6x-3)}}{\mathbf{6}}$ Se obtiene un factor común de cada binomio

$= \frac{\mathbf{2(3x+5)3(2x-1)}}{\mathbf{6}}$ Se obtiene el producto de los factores comunes

$= \frac{\mathbf{6(3x+5)(2x-1)}}{\mathbf{6}}$ Se simplifica la fracción

$= \mathbf{(3x+5)(2x-1)}$ Por lo tanto, $\mathbf{6x^2 + 7x - 5 = (3x + 5)(2x - 1)}$

Para finalizar esta sección regresamos al problema inicial del área de terreno rectangular dada por la expresión algebraica $x^2 + 5x + 6$ y se requiere colocar malla en todo su perímetro ¿Cuál sería la expresión que determina la medida de los lados del rectángulo?



Lado b

Lado a

Factorizando la expresión $\mathbf{x^2 + 5x + 6}$, se tiene $\mathbf{x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)}$

Entonces el lado $a = x + 3$ y el lado $b = x + 2$

El perímetro para colocar la malla seria

$$P = 2a + 2b = 2(x + 3) + 2(x + 2) = 2x + 6 + 2x + 4 = 4x + 10$$

POR UNA EDUCACIÓN QUE GENERA CAMBIO

Recurso audiovisual

En el siguiente vinculo o con el QR EJERCICIOS DE FACTORIZACIÓN permitirá a los estudiantes acceder fácilmente a contenido sobre factorización (factor común, trinomios, diferencia de cuadrados, etc.), entre otros temas, además presenta ejemplos interactivos ideales para usar en clases, tareas o actividades autodidactas.

Lectura: Funciones y Fracciones Algebraicas

Funciones

Considera las siguientes funciones simples, $f(x)=2x+1$ y $g(x)=x^2$. ¿Qué significa operar con funciones?, ¿Cómo se podría sumar $f(x)$ con $g(x)$?, ¿Qué entienden por dominio de una función?.

El concepto de función es fundamental en las matemáticas, especialmente en el área del algebra y el cálculo. Permite describir relaciones entre conjuntos de datos, modelar situaciones del mundo real y realizar predicciones. A lo largo de esta lectura, abordaremos las operaciones entre funciones, cómo identificar sus dominios y raíces, así como la manipulación de fracciones algebraicas. Estos

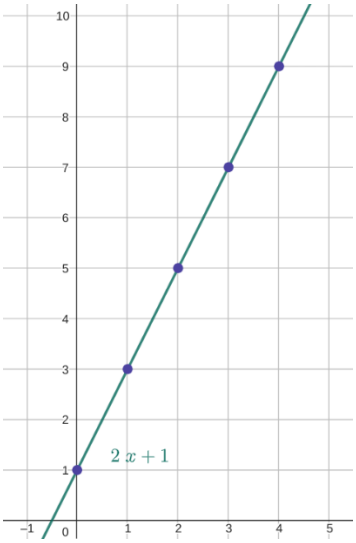
conocimientos son esenciales para desarrollar habilidades de razonamiento lógico y algebraico que se aplican en múltiples áreas de la ciencia, la economía y la ingeniería.

Definición

Considere dos conjuntos cualesquiera $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$. Una función $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B}$ es una colección de pares ordenados (x, y) tales que no hay dos pares con el mismo primer elemento. Al conjunto $\boldsymbol{A}$ se le llama dominio y al $\boldsymbol{B}$ se le llama contradominio. El conjunto de todas las componentes $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{B}$, tales que $(x, y) \in f$, se le llama rango o imagen de f. Se acostumbra a usar la notación $y = f(x)$. Las funciones en las que estamos interesados en estudiar son aquellas en las que $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son subconjuntos de números reales, como lo son las líneas rectas en $\mathbb{R}^2$ son funciones, las funciones cuadráticas, etc. Estas funciones fueron estudiadas en las UAC'S de pensamiento matemático 2 y 3. Generalmente hay una fórmula que nos permite calcular las imágenes de la función, esta es llamada regla de correspondencia.

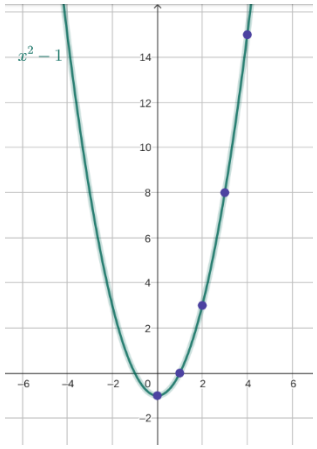
Ejemplo 1. La recta $y = 2x + 1$ es una función lineal, su regla de correspondencia es la expresión $2x + 1$, algunas imágenes de esta función son:

x	operación	$f(x)$
0	$(2)(0) + 1$	1
1	$(2)(1) + 1$	3
2	$(2)(2) + 1$	5
2	$(2)(3) + 1$	7

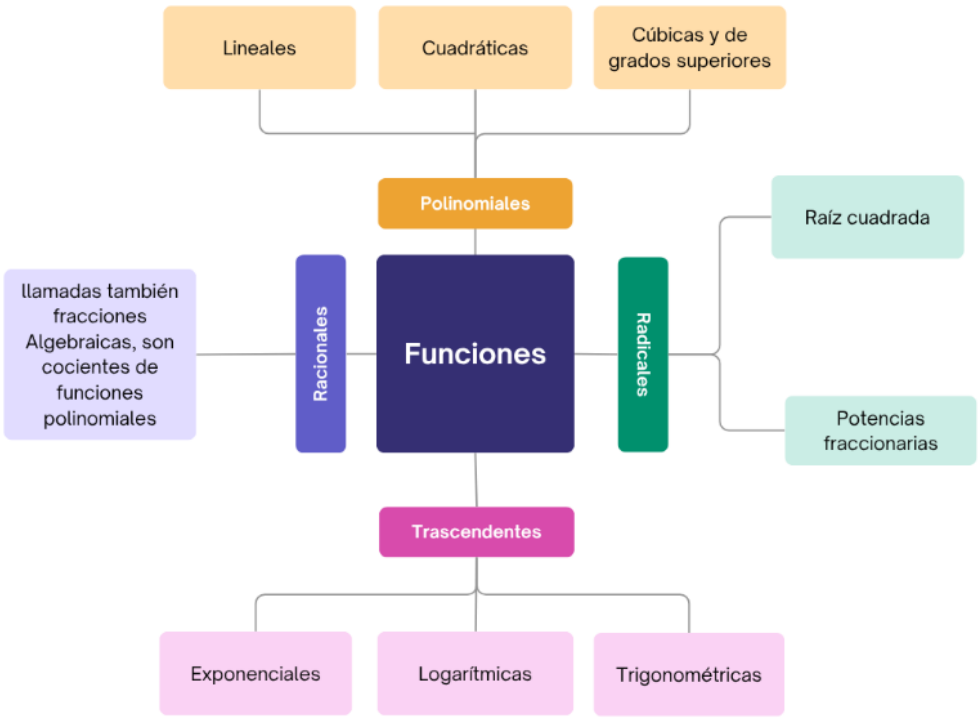


Ejemplo 2. Considera la función cuadrática $f(x) = x^2 - 1$

x	operación	$f(x)$
0	$(0)^2 - 1$	-1
1	$(1)^2 - 1$	0
2	$(2)^2 - 1$	3
3	$(3)^2 - 1$	8



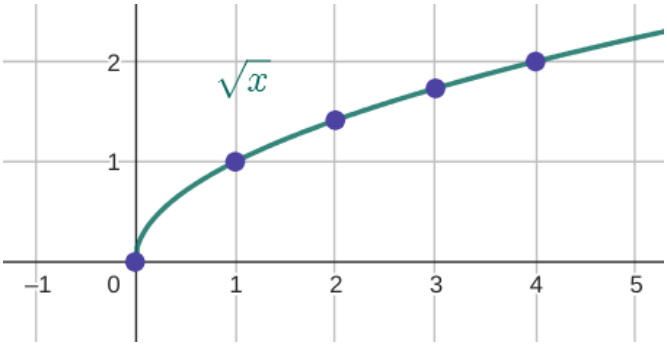
Las funciones se clasifican en **algebraicas y trascendentes**. En el primer grupo (algebraicas) están las polinomiales y todas aquellas que se componen por sumas, restas, multiplicaciones o divisiones de éstas y de radicales. En el segundo grupo (trascendentes) están aquellas que no se escriben en estos términos finitos, sino en sumas o series infinitas, tales como las exponenciales, logarítmicas y trigonométricas. EL siguiente diagrama muestra esta clasificación:



POR UNA EDUCACIÓN QUE GENERA CAMBIO

Ejemplo 3. La raíz cuadrada es un ejemplo de función radical: $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x}}$. El dominio de esta función es los números reales positivos. Se presenta una tabla de valores y una gráfica.

x	$f(x)$
0	$\sqrt{0} = 0$
1	$\sqrt{1} = 1$
2	$\sqrt{2} = 1.41$
3	$\sqrt{3} = 1.73$
4	$\sqrt{4} = 2$



Una de las funciones más importantes en matemáticas es la función exponencial natural $\boldsymbol{f(x) = e^x}$, cuyo dominio son todos los números reales (aunque en ciertas aplicaciones se restringe éste a los números *enteros* positivos) y su rango son los números positivos $(y > 0)$. Esta función tiene diversas aplicaciones, en finanzas, crecimiento poblacional, bacteriano, enfriamiento de Newton, entre otras.

Ejemplo: La población mexicana en el año 2005 era de $103{,}263{,}388$ habitantes y se estimaba entonces un crecimiento exponencial de 1% anual, de acuerdo con la página web del INEGI, pero actualmente, la tasa de crecimiento promedio anual es del 1.8% ¿cuál será la población mexicana en el año 2017, el 2021 y el 2025, si continúan las mismas condiciones de crecimiento.

Solución. La expresión general para el crecimiento poblacional (suponiendo que no hay restricciones para el crecimiento numérico) es $\boldsymbol{N(t) = N_0 e^{kt}}$, donde $\boldsymbol{N_0}$ es la población inicial y $\boldsymbol{k}$ es la tasa de crecimiento. En este ejemplo $\boldsymbol{N_0 = 103{,}263{,}388}$ y $\boldsymbol{k = 1.8\% = 0.018}$. Generalmente se utiliza el dominio de los enteros positivos, aunque se podría calcular la población para fracciones de años (meses). Sustituyendo estos valores en la expresión $\boldsymbol{N(t) = N_0 e^{kt}}$, tenemos el modelo para este problema

POR UNA EDUCACIÓN QUE GENERA CAMBIO

$$\boldsymbol{N(t) = 103,263,388 \cdot e^{0.018t}}$$

La población en 2017 corresponde a un lapso de 12 años desde 2005.

$$N(12) = 103{,}263{,}388 \cdot e^{(0.018)(12)}$$

$$\boldsymbol{N(12) = 128,160,436}$$

Para 2021, ya han transcurrido 16 años

$$N(16) = 103{,}263{,}388 \cdot e^{(0.018)(16)}$$

$$\boldsymbol{N(16) = 137,728,297}$$

Para 2025, ya han transcurrido 20 años

$$N(20) = 103{,}263{,}388 \cdot e^{(0.018)(20)}$$

$$\boldsymbol{N(20) = 148,010,451}$$

Operaciones con funciones

Las operaciones algebraicas básicas incluyen suma, resta, multiplicación y división, además de la composición de funciones. Al realizar estas operaciones, es importante aplicar correctamente las reglas algebraicas y prestar atención al dominio resultante.

Consideremos las funciones $\boldsymbol{f(x) = 2x + 1}$ y $\boldsymbol{g(x) = x^2}$ planteadas al inicio de esta lectura, encuentra la suma, resta, multiplicación, división y composición de éstas funciones, ordenando los términos, simplificando y/o factorizando cuando sea posible.

1. $\boldsymbol{(f + g)(x) = (2x + 1) + x^2 = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2}$
2. $\boldsymbol{(f - g)(x) = (2x + 1) - x^2 = -x^2 + 2x + 1}$
3. $\boldsymbol{(f.g)(x) = (2x + 1)(x^2) = 2x^3 + x^2}$
4. $\boldsymbol{(\frac{f}{g})(x) = \frac{2x+1}{x^2},\ x \neq 0}$
5. $\boldsymbol{(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 2x^2 + 1}$

PARA RECORDAR

RAICES DE FUNCIONES

Las raíces de una función son los valores de x de su dominio que hacen que la función sea igual a cero, es decir, $\boldsymbol{r}$ es una raíz de $\boldsymbol{f}$ si $\boldsymbol{f(r) = 0}$. Geométricamente son aquellos puntos del plano $(r, 0)$ que pertenecen a la gráfica de la función, o de dicho de otra forma, los puntos donde la gráfica de la función intersecta el eje x. Para funciones cuadráticas, se puede utilizar la factorización o la fórmula general para encontrar las raíces.

DOMINIO DE FUNCIONES

El dominio de una función $f: A \to B$ son todos aquellos valores $x \in A$ para los cuales la función está bien definida, donde "bien definida" se refiere a que al evaluar f en x, el resultado será un número real.

Las funciones racionales son expresiones de la forma $\frac{\boldsymbol{P(x)}}{\boldsymbol{Q(x)}}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios. Para operar con ellas se requiere:

1. Restringir los valores de x a los números donde no se anule el denominador $Q(x) \neq 0$, Es decir, el dominio es $\{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}$
2. Factorizar numeradores y denominadores.
3. Simplificar factores comunes.
4. Aplicar reglas de suma, resta, multiplicación o división de fracciones.

EJEMPLO. Hallar el dominio de la función $\boldsymbol{h(x)} = \frac{(\boldsymbol{x^2+3x+2})}{(\boldsymbol{x^2-4})}$

Primero factorizamos el denominador: $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$

POR UNA EDUCACIÓN QUE GENERA CAMBIO

El dominio excluye $x = 2$ y $x = -2$, ya que hacen que el denominador sea cero. Así, el Dominio de la función es el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : x \neq \pm 2\}$

Operaciones con fracciones algebraicas

Sean las funciones racionales $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$ $g(x) = \frac{2x^2}{x^2-1}$, $x \neq \pm 1$. Calcular la suma, resta, multiplicación, división y composición. En cada operación se recuperan las fórmulas para resolver operaciones con fracciones de números, salvo para la composición que es una operación exclusiva de funciones.

OPERACIÓN	DESARROLLO
Suma $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$	$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{1}{x^2+1} + \frac{2x^2}{x^2-1}, \; x \neq \pm 1$ $(f+g)(x) = \frac{x^2 - 1 + 2x^2(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2-1)}$ $(f+g)(x) = \frac{x^2 - 1 + 2x^4 + 2x^2}{(x^2+1)(x^2-1)}$ $(f+g)(x) = \frac{2x^4 + 3x^2 - 1}{x^4 - 1}, \; x \neq \pm 1$
Resta $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$	$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{1}{x^2+1} - \frac{2x^2}{x^2-1}, \; x \neq \pm 1$ $(f-g)(x) = \frac{x^2 - 1 - 2x^2(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2-1)}$ $(f-g)(x) = \frac{x^2 - 1 - 2x^4 - 2x^2}{(x^2+1)(x^2-1)}$ $(f-g)(x) = \frac{-2x^4 - x^2 - 1}{(x^2+1)(x^2-1)}$ $(f-g)(x) = -\frac{2x^4 + x^2 + 1}{x^4 - 1}, \; x \neq \pm 1$
Multiplicación	$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \frac{1}{x^2+1} \cdot \frac{2x^2}{x^2-1}, \; x \neq \pm 1$

POR UNA EDUCACIÓN QUE GENERA CAMBIO

$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$	$(f\cdot g)(x)=\frac{2x^2}{x^4-1},\ x\neq\pm1$
División $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{ad}{bc}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\frac{1}{x^2+1}}{\frac{2x^2}{x^2-1}}=\frac{1}{x^2+1}\cdot\frac{x^2-1}{2x^2},\ x\neq0,1,-1$ $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{x^2-1}{2x^2(x^2+1)},\ x\neq0,1,-1$
Composición	$(f\circ g)(x)=f\big(g(x)\big)=\frac{1}{\left(\frac{2x^2}{x^2-1}\right)^2+1},\quad x\neq\pm1$ $(f\circ g)(x)=f\big(g(x)\big)=\frac{1}{\frac{4x^4}{(x^2-1)^2}+1},\quad x\neq\pm1$ $(f\circ g)(x)=\frac{1}{\frac{4x^4+(x^2-1)^2}{(x^2-1)^2}}=\frac{(x^2-1)^2}{4x^4+x^4-2x^2+1},\quad x\neq\pm1$ $(f\circ g)(x)=\frac{(x^2-1)^2}{5x^4-2x^2+1},\ x\neq\pm1$

Lectura: Intervalos

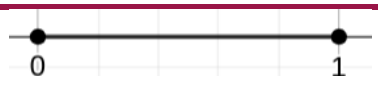
Definición

Los intervalos son objetos útiles para representar segmentos de la recta real y para los dominios de funciones.

Se define un intervalo cerrado $[a,b]$ donde son dos números con $a<b$, como el conjunto de números x tales que $a\leq x\leq b$, el símbolo $\leq$ indica que tanto a como b pertenecen al intervalo. El intervalo abierto (a,b) se define de manera similar solo que esta vez se usa el símbolo menor estricto $<$, son los números x tales que $a<x<b$, el menor estricto indica que a y b no pertenecen al intervalo. De manera análoga se definen los intervalos semiabiertos por la izquierda $(a,b]$, o por la derecha, $[a,b)$.

También son muy usados los intervalos infinitos llamados también rayos o semirectas. Sea a un número. El intervalo $[a, \infty)$ está formado por los números x tales que $x \geq a$.

En la siguiente tabla se resume la exposición anterior con ejemplos

Tipo de intervalo	**Expresión algebraica**	**gráfica**
cerrado	$[0,1] = \{x : 0 \leq x \leq 1\}$	
abierto	$(0,1) = \{x : 0 < x < 1\}$	
Semiabierto por la derecha	$[0,1) = \{x : 0 \leq x < 1\}$	
Semiabierto por la izquierda	$(0,1] = \{x : 0 < x \leq 1\}$	
Rayo abierto por la izquierda	$(0, \infty) = \{x : x > 0\}$	
Rayo abierto por la derecha	$(-\infty, 0) = \{x : x < 0\}$	

De forma similar se pueden dar ejemplos de rayos cerrados. La flecha indica que el rayo se extiene indefinidamente en esa dirección.

Dominios de funciones usando intervalos.

Considera la función $f(x) = \sqrt{x-2}$. El dominio de esta función son aquellos números donde el radicando no sea negativo, es decir, en dónde $x - 2 \geq 0$. Al pasar el -2 al otro lado de la desigualdad, este pasa positivo y queda ($x \geq 2$), lo que corresponde al intervalo $[2, \infty)$ y al rayo

Hagamos otro ejemplo más elaborado, expresa el dominio de $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$. En este caso debemos hallar los valores de x que permiten la desigualdad $(x^2 - 1) \geq 0$.

POR UNA EDUCACIÓN QUE GENERA CAMBIO

para esto daremos valores en los sectores formados por el –1 y 1, por ejemplo, –2, 0 y 2

Evaluando en $x^2 - 1$

$$(x = -2) \implies (-2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3 \geq 0$$

$$(x = 0) \implies (0)^2 - 1 = 0 - 1 = -1 \not\geq 0$$

$$(x = 2) \implies (2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3 \geq 0$$

Note que dentro del intervalo de rojo $(-1,1)$ no se cumple la condición deseada. Pero sí se cumple en los rayos $(-\infty, -1]$ y $[1, \infty]$. Entonces el dominio está compuesto por la unión de estos dos rayos $(-\infty, -1] \cup [1, \infty]$. Observa que los extremos están incluidos

$$(x = \pm 1) \implies (\pm 1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0 \geq 0$$

TPV1-SA1-ACT01 Actividad de reforzamiento: Productos notables, Factorización y operaciones con funciones y fracciones algebraicas

Instrucciones: Organizados en binas y bajo el acompañamiento de tu profesor, resuelvan los ejercicios planteados, con la finalidad de reforzar los conocimientos adquiridos en clases. Se recomienda realizar las operaciones necesarias en su libreta de apuntes.

Parte 1- Productos notables

Desarrolla y simplifica las siguientes expresiones usando los productos notables. Completa los espacios con la expresión que corresponda.

1. $(x-a)(\quad) = x^2 - a^2$
2. $(x^2-a^2)(x^2+a^2) =$
3. $(\quad)(1+t) = 1 - t^2$
4. $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right) =$
5. $(1-t)^2 =$
6. $(x-3)(x+5) =$
7. $(x+8)(x-7) =$
8. Para $h \neq 0$, $\frac{(x+h)^2-x^2}{h} =$
9. Para $h \neq 0$, $\frac{(x+h)^3-x^3}{h} =$
10. Para $h \neq 0$, $\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} =$

Sugerencia para este último problema: multiplica y divide por el conjugado de $\sqrt{x+h}-\sqrt{x}$.

Parte 2- Factorización

Factoriza y simplifica las siguientes expresiones, completa los espacios en blanco.

1. $x^2 - 1 = (x+1)(\quad)$
2. $x^2 - x - 2 = (x+1)(\quad)$
3. $x^2 - 2x + 1 = (\quad)^2$

4. $2x^2 + x - 1 = (\quad)(\quad)$
5. $x^3 + 2x^2 + x + 2 = x^2(\quad) + 1(\quad) = (x^2 + 1)(\quad)$
6. $\frac{2x^2+x-1}{x+1} =$
7. $\frac{x^2-5x+6}{x-3} =$
8. $\frac{2x^2-10x+12}{x^2+3x-10} =$

Parte 3- Funciones y Fracciones algebraicas.

Sean $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x^2-4x+4}$; $g(x) = \frac{2x^2-10x+12}{x^2+3x-10}$

Calcula la regla de correspondencia de $(f+g)$; $(f-g)$; $(f \cdot g)$; $(\frac{f}{g})$, $(f \circ g)$ y $(g \circ f)$.

Calcula las raíces y dominio de cada función. Evalúe cada una de las reglas de correspondencias solicitadas en $x = 0$, esto es: $(f+g)(0)$, $(f-g)(0)$, $(f.g)(0)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(0)$, $(f \circ g)(0)$ y $(g \circ f)(0)$.

SUGERENCIA: Simplifique primero cada función (Factorizando) y posteriormente realice las operaciones solicitadas.

Progresión 2

Analiza de manera formal el concepto de límite, profundizando en el cálculo de límites de funciones mediante sus teoremas para dar solución a problemáticas contextualizadas de las ciencias utilizando métodos analíticos y/o recursos tecnológicos.

Metas de Aprendizaje	Categorías	Subcategorías
C1M1. Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos de ciencia y de su entorno.	**C1.** Procedural	**S1.** Elementos aritméticos algebraicos
C1M3. Comprueba los procedimientos usados en la resolución de problemas utilizando diversos métodos, empleando recursos tecnológicos o la interacción con sus pares.		**S3.** Elementos variacionales
C2M1. Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.	**C2.** Procesos de intuición y razonamiento	**S3.** Pensamiento formal
C3M1. Selecciona un modelo matemático por la pertinencia de sus variables y relaciones para explicar una situación, fenómeno o resolver un problema tanto teórico como de su contexto.	**C3.** Solución de problemas y modelación	**S1.** Uso de modelos
C3M3. Aplica procedimientos, técnicas y lenguaje matemático para la solución de problemas propios del pensamiento matemático, de áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno.		**S3.** Estrategias heurísticas y ejecución de procedimientos no rutinarios
		S4. Manejo de datos e incertidumbre

Lectura: Límite de Funciones

Noción de Límite

La palabra límite viene asociada con algo que tiene fin o se acerca a un momento especifico, sin llegar a superarlo. Cuando afirmamos de algo que tiene límite, nos referimos a que no puede sobrepasar una línea, punto o regla establecida; puede acercarse todo lo que quiera, pero sin rebasarlo. Este concepto se emplea en cálculo, el cual permite comprender la continuidad, la derivación y máximos y mínimos.

Un acercamiento a los límites se tiene cuando en una sucesión, sus términos se van aproximando rápidamente a un número cualquiera, entonces se puede decir que tiende a ese número, o bien, que su límite es dicho número. Cabe señalar que no todas las sucesiones se aproximan a un número, las que sí presentan este comportamiento se llaman convergentes.

El concepto de límite fundamenta el cálculo infinitesimal, muchos matemáticos utilizaron la idea intuitiva de límite, el barón de Cauchy (1789-1857), a principios del siglo XIX, quien dio una definición de límite y, en consecuencia, de la derivada de una función.

Ejemplo. Se muestra las siguientes sucesiones de números

2.1, 2.5, 2.7, 2.9, 2.99, 2.999 vemos que se va acercando a 3.

3.999, 3.99, 3.9, 3.7, 3.5, 3.1, 3.01, 3.001 vemos que también se va acercando a 3.

Aquí decimos que la sucesión de los números tiende a 3, y se puede expresar de la siguiente manera: $x \to 3$, donde x son los números que se van aproximando.

POR UNA EDUCACIÓN QUE GENERA CAMBIO

Veamos un ejemplo de cálculo de límite de manera intuitiva.

Ejemplo: Consideremos la función $f(x) = 3 - x^2$. Analicemos su comportamiento para los valores de x próximos a 1

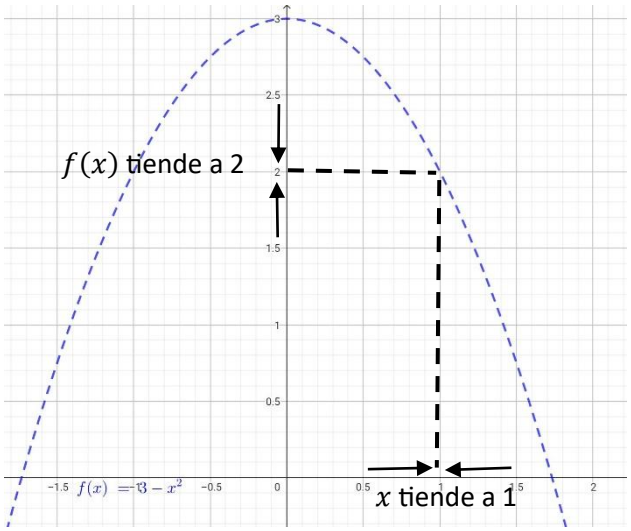
Solución. Construimos una tabla de valores cercanos a 1, posteriormente evaluamos la función para cada uno de los valores x propuestos.

Por la izquierda		**Por la derecha**	
x	$f(x) = 3 - x^2$	x	$f(x) = 3 - x^2$
0	$f(0) = 3 - (0)^2 = 3 - 0 = 0$	2	$f(2) = 3 - (2)^2 = 3 - 4 = -1$
0.5	$f(0.5) = 3 - (0.5)^2 = 3 - 0.25 = 2.75$	1.5	$f(1.5) = 3 - (1.5)^2 = 3 - 2.25 = 0.75$
0.9	$f(0.9) = 3 - (0.9)^2 = 3 - 0.81 = 2.19$	1.1	$f(1.1) = 3 - (1.1)^2 = 3 - 1.21 = 1.79$
0.99	$f(0.99) = 3 - (0.99)^2 = 3 - 0.9801 = 2.0199$	1.01	$f(1.01) = 3 - (1.01)^2 = 3 - 1.0201 = 1.9799$
0.999	$f(0.999) = 3 - (0.999)^2 = 3 - 0.998001 = 2.001999$	1.001	$f(1.001) = 3 - (1.0001)^2 = 3 - 1.00020001 = 1.99979999$
$x \to 1$	$f(x) \to 2$	$x \to 1$	$f(x) \to 2$

Observemos cuando x va tomando los valores de 0, 0.5, 0.9. 0.99, 0.999, la variable x tiende a 1, se considera que es **por la izquierda,** aplicando esos valores en la función $f(x) = 3 - x^2$ se observa que los valores de los resultados se van acercando a 2. Así, si $x \to 1$, entonces $f(x) \to 2$ se lee **"si x tiende a 1 entonces $f(x)$ tiende a 2".**

Por el otro lado, cuando x va tomando los valores 2, 1.5, 1.1, 1.01, 1.001, la variable x tiende a 1, se dice **por la derecha,** aplicando esos valores en la función $f(x) = 3 - x^2$ se observa que los valores de los resultados se van acercando a 2. Así, si $x \to 1$ entonces $f(x) \to 2$ se lee **"si x tiende a 1 entonces $f(x)$ tiende a 2".**

Analizando la tabla y la gráfica de la función $f(x) = 3 - x^2$ se concluye que cuando x se aproxima a 1 (por la izquierda o por la derecha) entonces $f(x)$ se aproxima a 2. Entonces decimos que "El límite de la función $f(x) = 3 - x^2$ cuando x tiende a 1 es 2". Gráficamente lo veríamos así:



CONCEPTO DE LÍMITE.

Sea $f(x)$ una función de variable real, si evaluamos en ella:

a) Valores menores y cercanos a a, **esto es** $x < a$, y obtenemos el número L_1, entonces a L_1 se le conoce como el límite por la izquierda, se representa por

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L_1$$

y se lee **"límite de la función $f(x)$ cuando x tiende a a por la izquierda es igual a L_1".**

b) Valores mayores y cercanos a a, **esto es** $x > a$, y obtenemos el número L_2, entonces a L_2 se le conoce como el límite por la derecha, se representa por

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L_2$$

y se lee **"límite de la función $f(x)$ cuando x tiende a a por la derecha es igual a L_2".**

c) Cuando L_1 y L_2 coinciden, es decir, $L_1 = L_2$, se afirma que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a existe y es $L = L_1 = L_2$ que se denota como.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Esta última expresión se lee **"el límite de la función $f(x)$ cuando x tiende hacia a es igual a L".**

A los límites $\lim_{x \to a^-} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \to a^+} f(x) = L_2$ también se les conoce como límites laterales.

IMPORTANTE: Cabe señalar que si $\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x)$, se concluye que el $\lim_{x \to a} f(x)$ **NO EXISTE.**

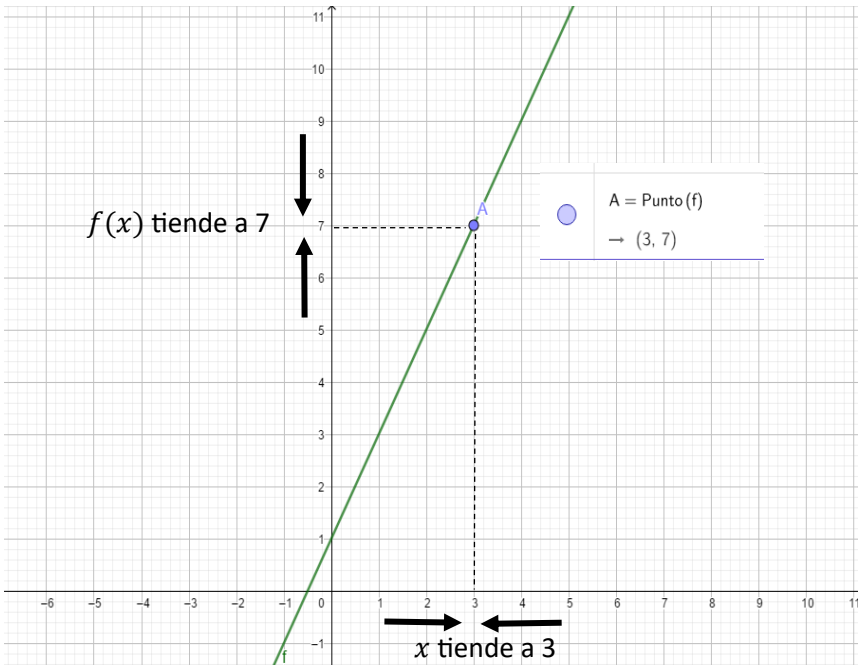
Ejemplo. Calcula el límite de la función $f(x) = 2x + 1$ cuando x tiende a 3, es decir, calcular el $\lim_{x \to 3} 2x + 1$

Solución. Elaboremos tabla de valores para conocer los límites laterales.

Límite lateral por la izquierda $\lim_{x \to a^-} f(x)$		Límite lateral por la derecha $\lim_{x \to a^+} f(x)$	
x	$f(x) = 2x + 1$	x	$f(x) = 2x + 1$
2	$f(2) = 2(2) + 1 = 5$	4	$f(4) = 2(4) + 1 = 9$
2.5	$f(2.5) = 2(2.5) + 1 = 6$	3.5	$f(3.5) = 2(3.5) + 1 = 8$
2.9	$f(2.9) = 2(2.9) + 1 = 6.8$	3.1	$f(3.1) = 2(3.1) + 1 = 7.1$
2.99	$f(2.99) = 2(2.99) + 1 = 6.98$	3.01	$f(3.01) = 2(3.01) + 1 = 7.01$
2.999	$f(2.999) = 2(2.999) + 1 = 6.998$	3.001	$f(3.001) = 2(3.001) + 1 = 7.001$
$x \to 3^-$	$\lim_{x \to 3^-} 2x + 1 = 7$	$x \to 3^+$	$\lim_{x \to 3^+} 2x + 1 = 7$

Como el límite por la izquierda y por la derecha son iguales a 7, concluimos que el límite SI EXISTE

$$\lim_{x\to 3} 2x + 1 = 7$$



Ejemplo. Calcula el límite de la función $g(x) = \frac{x+2}{x-3}$ cuando x tiende a 2

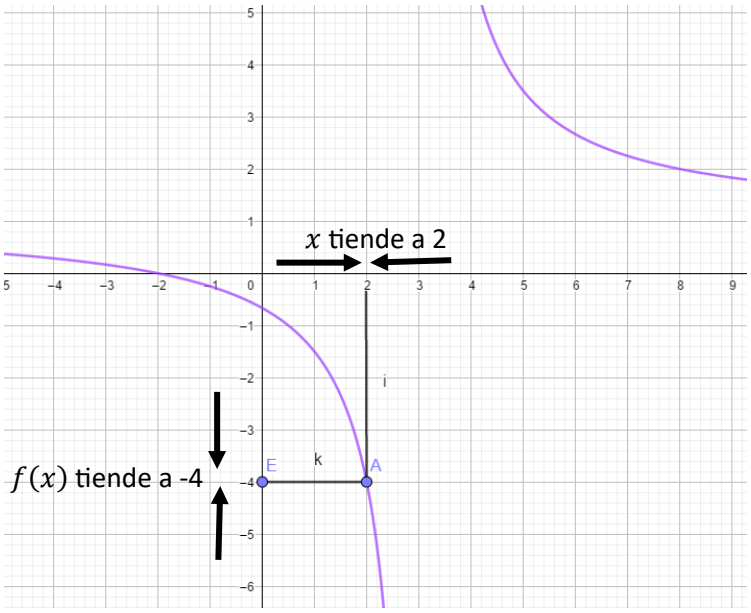
Solución. Elaboremos una de valores para x con números cercanos a 2.

Límite lateral por la izquierda $\lim_{x\to a^-} g(x)$		Límite lateral por la derecha $\lim_{x\to a^+} g(x)$	
x	$g(x) = \frac{x+2}{x-3}$	x	$g(x) = \frac{x+2}{x-3}$
1	$g(1) = \frac{1+2}{1-3} = \frac{3}{-2} = -1.5$	2.9	$g(2.9) = \frac{2.9+2}{2.9-3} = -49$
1.5	$g(1.5) = \frac{1.5+2}{1.5-3} = -2.3$	2.5	$g(2.5) = \frac{2.5+2}{2.5-3} = -9$
1.9	$g(1.9) = \frac{1.9+2}{1.9-3} = -3.55$	2.1	$g(2.1) = \frac{2.1+2}{2.1-3} = -4.56$

1.99	$g(1.99) = \frac{1.99+2}{1.99-3} = -3.95$	**2.01**	$g(2.01) = \frac{2.01+2}{2.01-3} = -3.95$
1.999	$g(1.999) = \frac{1.999+2}{1.999-3} = -3.995$	**2.001**	$g(2.001) = \frac{2.001+2}{2.001-3} = -4.005$
$x \to 2^-$	$\lim_{x\to 2^-} \frac{x+2}{x-3} = -4$	$x \to 2^+$	$\lim_{x\to 2^+} \frac{x+2}{x-3} = -4$

Como el límite por la izquierda y por la derecha son iguales a 7, concluimos que el límite SI EXISTE

$$\lim_{x\to 3} \frac{x+2}{x-3} = -4$$



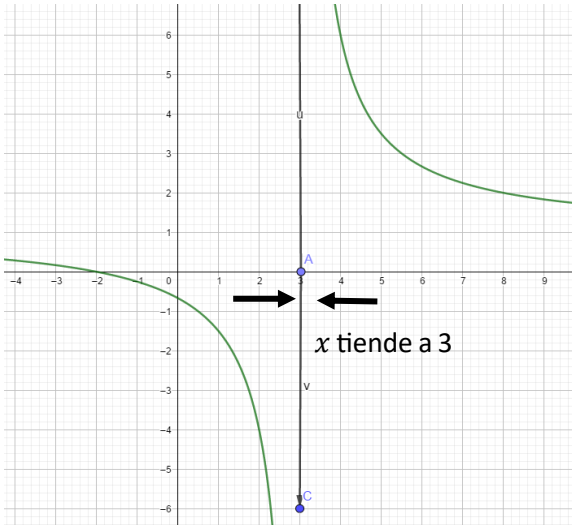
Ejemplo. Calcula el límite de la función $g(x) = \frac{x+2}{x-3}$ cuando x tiende a 3

Solución. Elaboremos una tabla de valores con números cercanos a 3

Límite lateral por la izquierda $\lim_{x\to 3^-} \frac{x+2}{x-3}$		**Límite lateral por la derecha** $\lim_{x\to 3^+} \frac{x+2}{x-3}$	
x	$g(x) = \frac{x+2}{x-3}$	x	$g(x) = \frac{x+2}{x-3}$
2	$g(2) = \frac{2+2}{2-3} = \frac{4}{-1} = -4$	**4**	$g(4) = \frac{4+2}{4-3} = \frac{6}{1} = 6$
2.5	$g(2.5) = \frac{2.5+2}{2.5-3} = -9$	**3.5**	$g(3.5) = \frac{3.5+2}{3.5-3} = 11$
2.9	$g(2.9) = \frac{2.9+2}{2.9-3} = -49$	**3.1**	$g(3.1) = \frac{3.1+2}{3.1-3} = 51$
2.99	$g(2.99) = \frac{2.99+2}{2.99-3} = -499$	**3.01**	$g(3.01) = \frac{3.01+2}{3.01-3} = 501$
2.999	$g(2.999) = \frac{2.999+2}{2.999-3} = -4999$	**3.001**	$g(3.001) = \frac{3.001+2}{3.001-3} = 5001$
$x \to 3^-$	$\lim_{x\to 3^-} \frac{x+2}{x-3} = -\infty$	$x \to 3^+$	$\lim_{x\to 3^+} \frac{x+2}{x-3} = \infty$

Se puede observar que cada vez que x se acerca más a 3 por la izquierda el límite se va a $-\infty$ (infinito negativo) y si x se acerca más a 3 por la derecha los resultados se van hacia $+\infty$ (infinito positivo). Como el límite por la izquierda y por la derecha no son iguales, entonces el límite no existe.

$$\lim_{x\to 3} \frac{x+2}{x-3} = \textbf{No existe}$$



POR UNA EDUCACIÓN QUE GENERA CAMBIO

PROPIEDADES DE LOS LÍMITES

En los ejercicios anteriores, se calcularon límites mediante tablas de valores. En el siguiente tema se estudiarán las propiedades de los límites y su correcta aplicación, para obtener los resultados de manera algebraica.

PROPIEDADES DE LOS LÍMITES	
PROPIEDAD	**EJEMPLO**
1. El límite de una función constante, cuando x tiende al valor "a" ($x \to a$), es la misma constante. $$\lim_{x \to a} C = C$$	$\lim_{x \to 3} 7 = 7$ $\quad \lim_{x \to 2} 3 = 3$ $\lim_{x \to -5} \frac{7}{9} = \frac{7}{9}$ $\quad \lim_{x \to \frac{2}{3}} -5 = -5$
2. El límite de la función identidad, cuando x tiende al valor "a" ($x \to a$), es el mismo valor "a". $$\lim_{x \to a} x = a$$	$\lim_{x \to 5} x = 5$ $\quad \lim_{x \to 2} x = 2$ $\lim_{x \to \frac{5}{7}} x = \frac{5}{7}$ $\quad \lim_{x \to -3} x = -3$
3. Si c es una constante y f es una función, el límite del producto de la constante por la función, cuando x tiende a un número "a" ($x \to a$) es igual al producto de la constante c por el límite de la función. $$\lim_{x \to a} cf(x) = c \lim_{x \to a} f(x)$$	$\lim_{x \to 2} 4x = (4)(\lim_{x \to 2} x) = 4(2) = 8$ $\lim_{x \to -3} 5x = (5)(\lim_{x \to -3} x) = 5(-3) = -15$ $\lim_{x \to \frac{3}{5}} 8x = 8(\lim_{x \to \frac{3}{5}} x) = 8\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{24}{5}$
4. Si f y g son funciones, El límite de una suma o diferencia de funciones, cuando la variable "x" tiende a "a" ($x \to a$), es igual a la suma o diferencia de los límites de las funciones. $$\lim_{x \to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$$	$\lim_{x \to 5}(3x^2 + 2x)$ $= \lim_{x \to 5}(3x^2) + \lim_{x \to 5}(2x)$ $= 3\lim_{x \to 5}(x^2) + 2\lim_{x \to 5}(x)$ $= 3(5)^2 + 2(5)$ $= 3(25) + 10 = 75 + 10 = 85$

POR UNA EDUCACIÓN QUE GENERA CAMBIO

5. El límite de un producto de funciones f y g, cuando x tiende a "a" ($x \to a$), es igual al producto de los límites de las funciones f y g . $$\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = [\lim_{x\to a} f(x)]\,[\lim_{x\to a} g(x)]$$	$$\lim_{x\to 4}(5x)(3x) = \lim_{x\to 4}(5x)\lim_{x\to 4}(3x)$$ $$= 5(4)3(4) = (20)(12)$$ $$= 240$$
6. El límite de un cociente (división) de funciones f y g cuando la variable "x " tiende a "a" ($x \to a$), es igual al cociente de los límites de las funciones f y g, siempre y cuando el límite de la función del denominador sea diferente de cero. $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$ **Siempre que** $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$	$$\lim_{x\to 2}\frac{5x-3}{2x+1} = \frac{\lim_{x\to 2}(5x-3)}{\lim_{x\to 2}(2x+1)}$$ $$= \frac{\lim_{x\to 2}5x - \lim_{x\to 2}3}{\lim_{x\to 2}2x + \lim_{x\to 2}1} = \frac{5(\lim_{x\to 2}x) - \lim_{x\to 2}3}{2\lim_{x\to 2}x + \lim_{x\to 2}1}$$ $$= \frac{5(2)-3}{2(2)+1} = \frac{10-3}{4+1} = \frac{7}{5}$$
7.- El límite de una potencia $n-ésima$ de una función f, cuando la variable "x" tiende a "a" ($x \to a$) es igual a la potencia $n-ésima$ del límite de la función f. $$\lim_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n$$	$$\lim_{x\to 2}(4x-1)^3 = [\lim_{x\to 2}4x - 1]^3$$ $$= [(4)(2) - 1]^3$$ $$= (8-1)^3 = (7)^3 = 343$$
8. El límite de una raíz $n-ésima$ de una función f, cuando la variable "x" tiende a "a" ($x \to a$) es igual a la raíz $n-ésima$ del límite de la función f . $$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$$	$$\lim_{x\to 2}\sqrt{2x^2+1} = \sqrt{\lim_{x\to 2}(2x^2+1)} =$$ $$= \sqrt{\lim_{x\to 2}2x^2 + \lim_{x\to 2}1} = \sqrt{2\lim_{x\to 2}2x^2 + 1}$$ $$= \sqrt{2(2)^2+1} = \sqrt{2(4)+1} = \sqrt{8+1} = \sqrt{9} = 3$$

POR UNA EDUCACIÓN QUE GENERA CAMBIO

LÍMITE DE FUNCIONES ALGEBRAICAS.

Una función polinomial es aquella de la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$$

donde las constantes a_i son coeficientes y los exponentes $n,\ n-1,\ \ldots,\ 2,\ 1$ son siempre enteros positivos.

Teorema. Sea $f(x)$ una función polinomial, entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Esto es, se toma el valor al cual tiende la variable x, se sustituye en la función y se realizan las operaciones pertinentes.

Otros resultados importantes son los siguientes que se refieren a la continuidad y composición de funciones.

Definición. Se dice que una función f es continua en un número "a" si

1) $f(a)$ está definido **2) $\lim_{x \to a} f(x)$ existe** **3) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$**

El teorema de límites que relaciona con la composición de funciones establece que si L es el límite de $g(x)$ cuando x tiende a a, y si f es continua en L, entonces el límite de la función compuesta $f(g(x))$ cuando x tiende a a es igual a $f(L)$.

Condiciones del teorema:

1. Existe el límite de $g(x)$ en $x = a$: es decir, $\lim_{x \to a} g(x) = L$ existe.

2. f es continua en $x = L$: esto significa que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a L es igual a $f(L)$, es decir, $\lim_{x \to L} f(x) = f(L)$

POR UNA EDUCACIÓN QUE GENERA CAMBIO

Formulación del teorema: Si se cumplen las dos condiciones anteriores, entonces $\lim_{x\to a} f\big(g(x)\big) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$

Ejemplo: Encuentra el valor de $\lim_{x\to -2} (1 - 2x^2 - x^3)$

Solución. Sustituir el valor de $x = -2$ en la función

$$\lim_{x\to -2} (1 - 2x^2 - x^3) = 1 - 2(-2)^2 - (-2)^3 = 1 - 2(4) - (-8) = 1 - 8 + 8 = 1$$

Ejemplo. Halla el límite $\lim_{x\to \frac{1}{2}} (x^3 - x - 2)$

Solución. Sustituir el valor de la variable $x = \frac{1}{2}$ en la función

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}} (x^3 - x - 2) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right) - 2 = \frac{1}{8} - \frac{1}{2} - 2 = \frac{1}{8} - \frac{4}{8} - \frac{16}{8} = -\frac{19}{8} = -2.375$$

Ejemplos. Resuelve los siguientes límites.

a) $\lim_{x\to 4} 5 = 5$

b) $\lim_{x\to 7} x = (7) = 7$

c) $\lim_{x\to 5} (3x + 10) = 3(5) + 10 = 15 + 10 = 25$

d) $\lim_{x\to 2} (2x)^3 = \big(2(2)\big)^3 = (4)^3 = 64$

e) $\lim_{x\to -1} 5x^3 - 8x^2 + 10x - 15 = 5(-1)^3 - 8(-1)^2 + 10(-1) - 15 = 5(-1) - 8(1) - 10 - 15 = -5 - 8 - 10 - 15 = -38$

f) $\lim_{x\to 8} \sqrt[3]{8x} = \sqrt[3]{8(8)} = \sqrt[3]{64} = 4$

g) $\lim_{x\to 4} \sqrt{7x + 21} = \sqrt{7(4) + 21} = \sqrt{28 + 21} = \sqrt{49} = 7$

h) $\lim_{x\to -6} \frac{10+5x}{x-4} = \frac{10+5(-6)}{-6-4} = \frac{10-30}{-10} = -\frac{20}{-10} = 2$

i) $\lim_{x\to 4} \frac{x^2+8}{x+4} = \frac{(4)^2+8}{4+4} = \frac{16+8}{8} = \frac{24}{8} = 3$

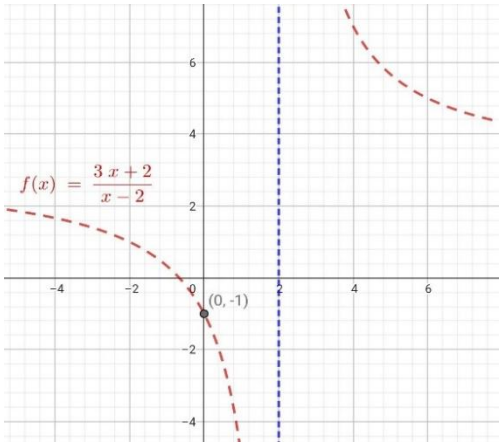
Límite de funciones racionales (límites indeterminados)

Las funciones racionales son funciones de la forma $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ donde $p(x)$ y $q(x)$ son funciones polinomiales y $q(x)$ es distinta de la función cero. Al ser cocientes de funciones polinomiales pueden emplearse los teoremas de límites, pero tomando en cuenta algunas consideraciones, en particular el hecho de que el denominador de la función no se anule (no sea cero).

Ejemplo. Calcular el $\lim_{x\to 0} \frac{3x+2}{x-2}$

Solución. En este caso veremos la sustitución algebraica de $x = 0$ en la función.

$\lim_{x\to 0} \frac{3x+2}{x-2} = \frac{3(0)+2}{0-2} = \frac{0+2}{-2} = \frac{2}{-2} = -1$



Ejemplo: Evalúa los siguientes límites

a) $\lim_{x\to 4} \frac{x^2+8}{x+4} = \frac{(4)^2+8}{4+4} = \frac{16+8}{8} = \frac{24}{8} = 3$

b) $\lim_{x\to \frac{3}{2}} \frac{6x-7}{8x+11} = \frac{6\left(\frac{3}{2}\right)-7}{8\left(\frac{3}{2}\right)+11} = \frac{\frac{18}{2}-7}{\frac{24}{2}+11} = \frac{9-7}{12+11} = \frac{2}{23}$

c) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{4x-6} = \frac{(1)^2+2(1)-3}{4(1)-6} = \frac{1+2-3}{4-6} = \frac{3-3}{-2} = \frac{0}{-2} = 0$

En todos los ejemplos anteriores en la función racional $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$, al calcular el límite el denominador $q(x)$ es distinto de cero, solo basta con sustituir y hacer operaciones.

¿Qué se puede hacer en el caso cuando al calcular el límite en el denominador se obtenga valor cero?

Veamos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1.- Calcula el $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1-x}{1-x^2}$

Solución. Sustituimos el valor de $x=1$ en la función

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{1-x^2}=\frac{1-(1)}{1-(1)^2}=\frac{1-1}{1-1}=\frac{0}{0}$$

Sin embargo, las divisiones entre cero no están definidas, por lo que resulta una indeterminación; para resolverlo es necesario tomar otro camino.

A este tipo de límites se le conoce como LÍMITES INDETERMINADOS $\left(\frac{0}{0}\right)$

Para resolver este tipo de límites, debemos aplicar **factorización** en alguno o en ambos miembros de la función racional, para poder eliminar la indeterminación.

Aplicando la factorización, se tiene lo siguiente:

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{1-x}{1-x^2}$

$= \lim\limits_{x\to 1} \frac{(1-x)}{(1+x)(1-x)}$ Cancelar términos del numerador y del denominador

$= \lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{(1+x)}$ Resolver el nuevo límite, sustituyendo el valor de $x=1$

$= \lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{(1+x)}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}=0.5$ Por lo tanto, el $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1-x}{1-x^2}=\mathbf{0.5}$

De manera lineal se puede resolver con los mismos pasos.

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{1-x^2}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{(1+x)(1-x)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(1+x)}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}=0.5$$

Ejemplo 2.- Encuentre el $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x-3}$

Solución. Sustituimos directamente $\boldsymbol{x=3}$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\boldsymbol{x^2-x-6}}{\boldsymbol{x-3}}=\frac{\boldsymbol{(3)^2-(3)-6}}{\boldsymbol{3-3}}=\frac{\boldsymbol{9-3-6}}{\boldsymbol{0}}=\frac{\boldsymbol{9-9}}{\boldsymbol{0}}=\frac{\boldsymbol{0}}{\boldsymbol{0}}$$

Se trata de un límite indeterminado $\frac{0}{0}$ así que debemos factorizar donde se encuentre el termino cuadrático, solo el numerador $\boldsymbol{x^2-x-6.}$

De manera directa con la sustitución y la eliminación

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+2)(\boldsymbol{x-3})}{(\boldsymbol{x-3})}=\lim_{x\to 3}(x+2)=3+2=5$$

Ejemplo 3.- Calcular $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-4}$

Solución. Sustituimos directamente $x=2$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\boldsymbol{x^2+x-6}}{\boldsymbol{x^2-4}}=\frac{\boldsymbol{(2)^2+(2)-6}}{\boldsymbol{(2)^2-4}}=\frac{\boldsymbol{4+2-6}}{\boldsymbol{4-4}}=\frac{\boldsymbol{6-6}}{\boldsymbol{0}}=\frac{\boldsymbol{0}}{\boldsymbol{0}}$$

Es un límite indeterminado $\frac{0}{0}$, procede a factorizar, en este caso el numerador y el denominador.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\boldsymbol{x^2+x-6}}{\boldsymbol{x^2-4}}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+3)(\boldsymbol{x-2})}{(x+2)(\boldsymbol{x-2})}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+3)}{(x+2)}=\frac{\boldsymbol{2+3}}{\boldsymbol{2+2}}=\frac{\boldsymbol{5}}{\boldsymbol{4}}$$

Ejemplo 4.- Calcula $\lim_{x\to 5}\frac{x^2+4x-45}{x^2-17x+60}$

Solución. Sustituimos directamente $x=5$

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2+4x-45}{x^2-17x+60}=\frac{(5)^2+4(5)-45}{(5)^2-17(5)+60}=\frac{25+20-45}{25-85+60}=\frac{45-45}{85-85}=\frac{0}{0}$$

Es un límite indeterminado, se tiene que factorizar el numerador y el denominador para eliminar la indeterminación.

De manera directa utilizando la factorización y la eliminación

$$\lim_{x\to 5} \frac{x^2+4x-45}{x^2-17x+60} = \lim_{x\to 5} \frac{(\boldsymbol{x-5})(\boldsymbol{x+9})}{(\boldsymbol{x-5})(x-12)} = \lim_{x\to 5} \frac{(x+9)}{(x-12)} = \frac{5+9}{5-12} = \frac{14}{-7} = -2$$

LÍMITES DE FUNCIONES RADICALES

Al evaluar un límite que involucre una **función radical**, se usa la sustitución directa para saber si este límite puede ser evaluado siempre que sea posible. De no ser así, es necesario explorar otros métodos para evaluar el límite.

Ejemplo. Halla los valores de los siguientes límites.

En estos dos casos solo se sustituye el valor de x algebraicamente.

a) $\lim_{x\to 2} \sqrt{9x+18} = \lim_{x\to 2} \sqrt{9x+18} = \sqrt{9(2)+18} = \sqrt{18+18} = \sqrt{36} = 6$

b) $\lim_{x\to 0} \sqrt{\frac{3x^2-8}{x-1}} = \sqrt{\frac{3(0)^2-8}{(0)-1}} = \sqrt{\frac{3(0)-8}{(0)-1}} = \sqrt{\frac{0-8}{0-1}} = \sqrt{\frac{-8}{-1}} = \sqrt{\frac{8}{1}} = \sqrt{8}$

Al sustituir directamente se observa que no presenta ningún problema en su solución.

El ejemplo siguiente muestra un límite donde se produce una indeterminación, lo cual habrá que eliminar algebraicamente para poder calcularlo.

Ejemplo 1.- Encuentra el valor de $\boldsymbol{\lim_{x\to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}}$

Solución: Sustituimos algebraicamente el valor de $x = 4$

$$\lim_{x\to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = \frac{4-4}{\sqrt{4}-2} = \frac{0}{2-2} = \frac{0}{0}$$

Es un límite indeterminado. Para resolverlo, se utiliza la racionalización, es decir, multiplicar la expresión (tanto numerador como denominador) por el conjugado del término donde aparezca la indeterminación. Veamos cómo:

$\lim_{x\to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$	Multiplicar por el conjugado de $\sqrt{x}-2$, es decir, $\sqrt{x}+2$
$= \lim_{x\to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}\left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}\right)$	Multiplicar de manera lineal
$= \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$	Multiplicar en el denominador $(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)$ Aplicar binomios conjugados $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ $(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)=(\sqrt{x})^2-(2)^2=x-4$
$= \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x})^2-(2)^2}$	Hacer operaciones $(\sqrt{x})^2=x$ $(2)^2=4$
$= \lim_{x\to 4} \frac{(\boldsymbol{x-4})(\sqrt{x}+2)}{(x-4)}$	Observar términos iguales para eliminar
$= \lim_{x\to 4} \sqrt{x}+2=$	Sustituir el valor de $x=4$ en el nuevo límite
$\lim_{x\to 4} \sqrt{x}+2=\sqrt{4}+2=2+2=4$	Por lo tanto, el $\lim_{x\to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}=4$

Ejemplo 2.- Encuentra el valor de $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$

Solución: Sustituimos algebraicamente el valor de $x=0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}=\frac{0}{\sqrt{0+1}-1}=\frac{0}{\sqrt{1}-1}=\frac{0}{1-1}=\frac{0}{0}$$

Es un límite indeterminado, para resolverlo, procedemos como el ejemplo anterior.

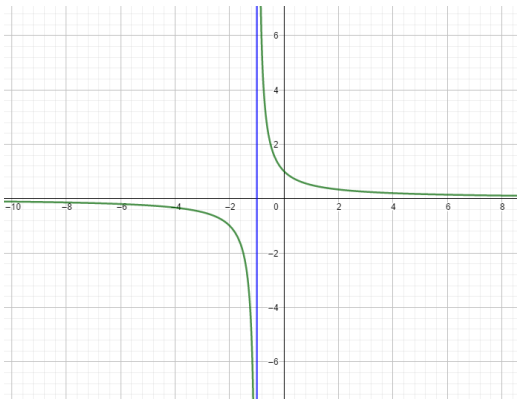
$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$	Multiplicar por el conjugado de $\sqrt{x+1}-1$, es decir, $\sqrt{x+1}+1$
$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}\left(\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}\right)$	Multiplicar de manera lineal
$= \lim_{x\to 0} \frac{(x)(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}$	Multiplicar en el denominador $(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)$ Aplicar binomios conjugados $(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1) = (\sqrt{x+1})^2 - (1)^2$ $= (x+1)-1 = x$
$= \lim_{x\to 0} \frac{(\boldsymbol{x})(\sqrt{x+1}+1)}{\boldsymbol{x}}$	Observar los términos a eliminar
$= \lim_{x\to 0} \sqrt{x+1}+1$	Sustituir $x = 0$ en el nuevo límite
$\lim_{x\to 0} \sqrt{x+1}+1 = \sqrt{0+1}+1 = \sqrt{1}+1$ $= 1+1 = 2$	Por lo tanto, el $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} = 2$

LÍMITES INFINITOS

Se conocen como límites infinitos a aquellos que crecen o disminuyen indefinidamente, conforme la variable dependiente se acerca a cierto valor por la derecha, por la izquierda o por ambos lados.

Consideremos la función $f(x) = \frac{1}{x+1}$

y calculemos el $\lim_{x\to -1} \frac{1}{x+1}$



Al tomar valores cercanos a $x = -1$ por la izquierda, la función decrece indefinidamente y al acercarnos por la derecha obtenemos valores positivos cada vez mayores.

POR UNA EDUCACIÓN QUE GENERA CAMBIO

$$f(-1.0001) = \frac{1}{-1.0001+1} = \frac{1}{-0.0001} = -10000$$

$$f(-0.9999) = \frac{1}{-0.9999+1} = \frac{1}{0.0001} = 10000$$

Podemos decir que: $\lim_{x\to -1^-} \frac{1}{x+1} = -\infty$ y $\lim_{x\to -1^+} \frac{1}{x+1} = +\infty$

Por lo tanto, **el límite NO EXISTE.**

LÍMITES AL INFINITO

Un límite al infinito es aquel que se obtiene de una función al aproximar la variable dependiente con valores cada vez mayores, tanto en sentido positivo como negativo, esto es, la variable tiende al infinito positivo $(+\infty)$ o infinito negativo $(-\infty)$.

Algunas funciones tienen la propiedad de que cuando se toman valores muy grandes de x tanto por la derecha como por la izquierda, la función se acerca a un valor fijo.

Si n es un entero positivo, entonces $\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ y $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

Esto significa que el límite de una función $\frac{1}{x^n}$ es cero cuando se x tiende a Infinito (∞) o menos infinito $(-\infty)$.

Este resultado se extiende cuando

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{K}{x^n} = k \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x^n} = k(0) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{K}{x^n} = k \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^n} = k(0) = 0$$

El método para trabajar con este tipo de límites consiste en dividir los términos de la función entre las variables con el exponente más grande, se realizan los ajustes algebraicos pertinentes y luego se aplica el resultado mencionado al inicio de este apartado.

Ejemplo 1.- Calcular $\boldsymbol{\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4x+5}{2-5x^3}}$

La potencia con el mayor exponente tanto en el numerador como en el denominador es x^3.

$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4x+5}{2-5x^3}$	Dividir $\frac{x^2-4x+5}{2-5x^3}$ entre la potencia de mayor exponente, en este caso es x^3
$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^3}-\frac{4x}{x^3}+\frac{5}{x^3}}{\frac{2}{x^3}-\frac{5x^3}{x^3}}$	Dividir de acuerdo con las leyes de los exponentes $\frac{x^2}{x^3}=x^{-1}=\frac{1}{x}$, $\frac{4x}{x^3}=4x^{-2}=\frac{4}{x^2}$, $\frac{5}{x^3}=\frac{5}{x^3}$ $\frac{2}{x^3}=\frac{2}{x^3}$, $\frac{5x^3}{x^3}=5x^0=5$
$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}+\frac{5}{x^3}}{\frac{2}{x^3}-5}$	Identificar los términos de la forma $\frac{1}{x^n}$
$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}-\frac{\mathbf{4}}{\boldsymbol{x^2}}+\frac{\mathbf{5}}{\boldsymbol{x^3}}}{\frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{x^3}}-5}$	Aplicar el siguiente resultado: $\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n}=0}$
$= \lim_{x\to\infty} \frac{0-0+0}{0-5}$	Simplificar la expresión y calcular el nuevo límite
$\lim_{x\to\infty} \frac{0}{-5}=\frac{0}{-5}=0$	Por lo tanto, el límite $\boldsymbol{\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4x+5}{2-5x^3}=0}$

Ejemplo 2.- Calcular $\boldsymbol{\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{\sqrt{2x^2-5x+3}}}$

$\boldsymbol{\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{\sqrt{2x^2-5x+3}}}$	Dividir $\frac{x+1}{\sqrt{2x^2-5x+3}}$ entre la potencia de mayor exponente, en este caso es x^2. Dentro de la raíz se divide entre x^2 y fuera de la raíz entre $\sqrt{x^2}=x$
$\boldsymbol{= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{5x}{x^2}+\frac{3}{x^2}}}}$	Dividir aplicando las leyes de los exponentes $\frac{x}{x}=1$, $\frac{1}{x}=\frac{1}{x}$, $\frac{2x^2}{x^2}=2x^0=2$ $\frac{5x}{x^2}=5x^{-1}=\frac{5}{x}$ $\frac{3}{x^2}=\frac{3}{x^2}$

POR UNA EDUCACIÓN QUE GENERA CAMBIO

$\lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{2-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}}}$	Identificar los términos de la forma $\frac{1}{x^n}$
$\lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{2-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}}}$	Aplicar el siguiente resultado: $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$
$\lim_{x\to\infty} \frac{1+0}{\sqrt{2-0+0}}$	Simplificar la expresión y calcular el nuevo límite
$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	Por lo tanto, el límite $\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{\sqrt{2x^2-5x+3}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

LÍMITES DE FUNCIONES TRASCENDENTES.

Las funciones trascendentes son aquellas que no pueden ser representadas por una ecuación polinómica, es decir; su regla de correspondencia no es algebraica. Se clasifican en funciones **trigonométricas, exponenciales y logarítmicas.**

Límites de Funciones Trigonométricas

Algunas identidades que son de gran apoyo para resolver los problemas de límites de funciones trigonométricas son las siguientes:

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS	
$Sen\,\theta = \frac{1}{\csc\theta}$	$Tan\,\theta = \frac{Sen\,\theta}{Cos\,\theta}$
$Cos\,\theta = \frac{1}{Sec\,\theta}$	$Cot\,\theta = \frac{Cos\,\theta}{Sen\,\theta}$
$Tan\,\theta = \frac{1}{Cot\,\theta}$	$sen^2\,x + cos^2 x = 1$
$Cot\,\theta = \frac{1}{Tan\,\theta}$	$1 + tan^2 x = sec^2 x$
$Sec\,\theta = \frac{1}{Cos\,\theta}$	$1 + cot^2 x = csc^2 x$
$Csc\,\theta = \frac{1}{Sen\,\theta}$	$sen\,x \csc x = 1$
$\cos x \sec x = 1$	$tan\,x\,cot\,x = 1$

POR UNA EDUCACIÓN QUE GENERA CAMBIO

Resultarán útiles también los siguientes límites, ya que en ocasiones se necesitarán para resolver otros:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$$

Ejemplos: Resuelve los siguientes límites

a) $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{2}} sen\, x = sen\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$

b) $\lim\limits_{x\to\pi} x\, Cos\, x = (\pi)cos2\,(\pi) = (\pi)(1) = \pi$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{12}{2\,cos\,4x} = \frac{12}{2\,cos\,4(0)} = \frac{12}{2\,cos\,(0)} = \frac{12}{2(1)} = \frac{12}{2} = 6$

d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} Cot^2\, x = Cot^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{Tan^2\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{Tan\left(\frac{\pi}{6}\right)Tan\left(\frac{\pi}{6}\right)} = 3$

Se aplicó la identidad $\cot x = \frac{1}{\tan x}$ en consecuencia $\cot^2 x = \frac{1}{\tan^2 x}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sen\, x}{tan\, x}$ Se aplica la identidad de $Tan\, x = \frac{sen\, x}{cos\, x}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{sen\, x}{sen\, x}}{\cos x}$ Aplicar la regla del sándwich agregando 1 al numerador

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{senx}{1}}{\frac{sen\, x}{cos\, x}}$ Multiplicar extremo por extremo y medio por medio

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{(sen\, x)(cos\, x)}{1(sen\, x)}$ Cancelar términos en el numerador y denominador

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{cos\, x}{1}$

$= \lim\limits_{x\to 0} cos\, x$ Sustituir el valor de $x = 0$ en el nuevo límite

$= \lim\limits_{x\to 0}\cos x = \cos(0) = 1$ Por lo tanto, el $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sen\, x}{tan\, x} = 1$

POR UNA EDUCACIÓN QUE GENERA CAMBIO

LÍMITES CON LA EXPRESIÓN $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1$

Ejemplo 1.- Resuelve $\lim_{x\to 0}\frac{3\operatorname{sen} 2x}{5x}$

Solución. $\lim_{x\to 0}\frac{3\operatorname{sen} 2x}{5x}=\frac{3\,sen\,2(0)}{5(0)}=\frac{3\,sen\,(0)}{0}=\frac{3(0)}{0}=\frac{0}{0}$ "Límite Indeterminado"

$\lim_{x\to 0}\frac{3\operatorname{sen} 9x}{5x}$	Multiplicar por 9 en el numerador y denominador.
$=\lim_{x\to 0}\frac{9(3\operatorname{sen} 9x)}{9(5x)}$	Acomodar los términos con tal que aparezca $9x$
$=\lim_{x\to 0}\frac{9(3)sen\,9x}{5(9x)}$	Multiplicar $\frac{9(3)}{5}=\frac{27}{5}$
$=\lim_{x\to 0}\frac{27sen\,9x}{5(9x)}$	Separar la constante del límite
$=\frac{27}{5}\lim_{x\to 0}\frac{sen\,9x}{9x}$	Aplicar $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1$ En nuestro caso $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 9x}{9x}=1$
$=\frac{27}{5}\lim_{x\to 0}\frac{sen\,9x}{9x}=\frac{27}{5}(1)=\frac{27}{5}$	Por lo tanto, $\lim_{x\to 0}\frac{3\operatorname{sen} 9x}{5x}=\frac{27}{5}$

Ejemplo 2.- Resuelve $\lim_{x\to 0}\frac{4\operatorname{sen}^2 x}{x}$

Solución. $\lim_{x\to 0}\frac{4\operatorname{sen}^2 x}{x}=\frac{4\,sen^2\,(0)}{(0)}=\frac{4\,(0)}{0}=\frac{0}{0}$ "Limite indeterminado"

$\lim_{x\to 0}\frac{4\operatorname{sen}^2 x}{x}$	Separar solamente $Sen^2x=sen\,x\,sen\,x$
$\lim_{x\to 0}\frac{4\,\text{senx}\ \operatorname{sen} x}{x}$	Acomodar los términos con tal que aparezca $\frac{sen\,x}{x}$
$\lim_{x\to 0}(4\,senx)(\frac{sen\,x}{x})$	Aplicar las propiedades de límites
$(4)(\lim_{x\to 0}senx)(\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x})$	Aplicando $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1$
$=(4)(\lim_{x\to 0}senx)\left(\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x}\right)=4sen\,(0)(1)=0$	Por lo tanto, $\lim_{x\to 0}\frac{4\operatorname{sen}^2 x}{x}=0$

Límite de Funciones Exponenciales.

En los primeros casos solo es de sustitución directa

Ejemplo: Resuelve los siguientes límites

a) $\lim_{x\to 2} e^x = e^2$

b) $\lim_{x\to 5} log(x^2 - 9) = log\left((5)^2 - 9\right) = log(25 - 9) = log(16)$

c) $\lim_{x\to 3} 2^{x-1} = 2^{3-1} = 2^2 = 4$

REPRESENTACIONES DE LÍMITES DE FUNCIONES EXPONENCIALES.

Podemos aplicar los siguientes límites

$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ $\qquad$ $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ $\qquad$ $\lim_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}} = e^k$

Resolvamos algunos ejemplos para aplicar estas propiedades

Ejemplo: Resuelve $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+2}$

Solución. Debemos llevar el limite $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+2}$ **a la forma** $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+2}$	Aplicar la ley de los exponentes
$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^2$	Utilizar $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ y sustituir $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$
$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^2 = (e)(1+0)^2$ $= (e)(1)^2 = (e)(1) = e$	Por lo tanto, $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+2} = e$

Ejemplo. Resuelve $\boldsymbol{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{4}{x}}}$

Solución. Debemos llevar el $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{4}{x}}$ a la forma $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{4}{x}}$	Aplicar las propiedades de los exponentes
$= \left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)^4$	Aplicando $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ tenemos
$= \left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)^4 = (e)^4 = e^4$	Por lo tanto, $\boldsymbol{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{4}{x}} = e^4}$

Ejemplo. Resuelve $\boldsymbol{\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{3}{x}}}$

Solución. Debemos llevar el $\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{3}{x}}$ a la forma $\lim_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}} = e^k$

$\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{3}{x}}$	Aplicar las propiedades de los exponentes
$= \left(\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}\right)^3$	Aplicar $\lim_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}} = e^k$ con $k = 3$
$= \left(\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}\right)^3 = (e^3)^3 = e^9$	Por lo tanto, $\boldsymbol{\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{3}{x}} = e^9}$

Estudio independiente. ¡Para saber más!:

En el siguiente vinculo o con el código QR EJERCICIOS DE LÍMITES podrás acceder fácilmente a lecciones de cálculo de límites, utilizando el concepto intuitivo de límite y cálculo de límites de funciones, entre otros temas, presentando ejemplos interactivos ideales para usar y practicar en clases, hacer tus tareas o actividades autodidactas.

POR UNA EDUCACIÓN QUE GENERA CAMBIO

A continuación, se presenta un problema de aplicación de límites.

Ejemplo. La Federación de caza de cierto Estado de la República Mexicana, introduce 50 ciervos en un área protegida. Se cree que el número de ciervos crece siguiendo el modelo $\boldsymbol{N(t) = \frac{10(5+3t)}{1+0.04t}}$ donde t corresponde al tiempo transcurrido. ¿A qué valor tiende la población cuando el tiempo crece indefinidamente?

Solución. Para dar respuesta a la pregunta, se debe calcular el límite de la función $N(t)$ cuando el tiempo t tienda al infinito. Esto es, calcular el límite $\lim_{t\to\infty} N(t)$,

$$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{N(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{\boldsymbol{10(5+3t)}}{\boldsymbol{1+0.04t}} = \lim_{t\to\infty} \frac{\boldsymbol{50+30t}}{\boldsymbol{1+0.04t}}$$

Dividimos todos los términos entre la potencia de mayor exponente, en este caso es t

$$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{N(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{\left(\frac{\boldsymbol{50}}{\boldsymbol{t}} + \frac{\boldsymbol{30t}}{\boldsymbol{t}}\right)}{\left(\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{t}} + \frac{\boldsymbol{0.04t}}{\boldsymbol{t}}\right)}$$

Aplicamos las propiedades de los límites,

$$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{N(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{\boldsymbol{50}}{\boldsymbol{t}} + \boldsymbol{30}}{\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{t}} + \boldsymbol{0.04}} = \frac{\lim_{t\to\infty}\left(\frac{\boldsymbol{50}}{\boldsymbol{t}} + \boldsymbol{30}\right)}{\lim_{t\to\infty}\left(\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{t}} + \boldsymbol{0.04}\right)} = \frac{\lim_{t\to\infty}\frac{\boldsymbol{50}}{\boldsymbol{t}} + \lim_{t\to\infty}\boldsymbol{30}}{\lim_{t\to\infty}\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{t}} + \lim_{t\to\infty}\boldsymbol{0.04}}$$

Haciendo uso del siguiente resultado: $\lim_{x\to+\infty} \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{x^n}} = \boldsymbol{0}$, se tiene que:

$$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{N(t)} = \frac{\boldsymbol{0+30}}{\boldsymbol{0+0.04}} = \frac{\boldsymbol{30}}{\boldsymbol{0.04}} = \boldsymbol{750}$$

Por lo tanto, cuando el tiempo t crece indefinidamente, habrá una cantidad de 750 ciervos.

Problemario TPV1-SA1-ACT02

Límite de Funciones

INSTRUCCIONES: Organizados en binas, resuelvan los ejercicios planteados. Realiza las operaciones en tu libreta de apuntes y asegúrate de revisar tus respuestas antes de entregar la actividad.

Parte 1. Calcula el siguiente límite por medio de aproximaciones por la izquierda y la derecha.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$$

Por la izquierda		Por la derecha	
x	$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$	x	$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$
0.95		1.05	
0.96		1.04	
0.97		1.03	
0.98		1.02	
0.99		1.01	
$x \to 1^-$		$x \to 1^+$	

Parte 2. Calcula los siguientes límites, vía factorización. Realiza las operaciones en tu libreta.

Operaciones	Resultado
$\lim_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x+1} =$	
$\lim_{x \to -5} \frac{x^2-25}{x+5} =$	
$\lim_{x \to 3} \frac{x^2+4x-21}{x-3} =$	
$\lim_{x \to 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-4} =$	
$\lim_{x \to 6} \frac{x^2-11x+30}{x^2-13x+42} =$	

Parte 3. Calcula los siguientes límites que presentan la forma indeterminada 0/0 vía racionalización. Si no alcanza el espacio, realiza las operaciones en tu libreta

Operaciones	Resultado
$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} =$	
$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} =$	
$\lim_{x\to 36} \frac{\sqrt{x}-6}{x-36} =$	

Parte 4. Calcula los siguientes límites en el infinito de funciones racionales y trascendentes. Recuerda que las funciones $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, e^x, $\ln x$ son funciones continuas en sus dominios. Cuando el resultado sea directo justificarlo con un argumento.

Operaciones	Resultado
$\lim_{x\to \infty} \frac{3x^2-6x+5}{x^3-2x} =$	
$\lim_{x\to \infty} \frac{3x^2+2x}{2x^4-x+9} =$	
$\lim_{x\to \infty} \frac{4x+2}{8x-3} =$	

Operaciones	Resultado
$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x} =$	
$\lim_{x\to \pi} \cos x =$	
$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \tan x =$	

Parte 5. Resuelve los siguientes problemas contextualizados de límites.

El número de individuos (en millones) de una población, está expresada por medio de la función:

$$g(x) = \frac{30+8x^2}{x^2+2x+1},\ x\ en\ años$$

¿Qué pasa con el tamaño de la población al pasar un tiempo muy grande?

Progresión 3

Analiza la definición formal de derivada a partir del planteamiento de una situación-problema significativa para el estudiantado que evidencie la variación de una recta secante a la recta tangente, con la cual se puedan obtener las reglas de derivación para calcular derivadas de funciones, empleando en caso de ser necesario recursos tecnológicos.

Metas de Aprendizaje	Categorías	Subcategorías
C1M1. Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno.	**C1**. Procedural	**S1.** Elementos aritmético-algebraicos
C1M3. Comprueba los procedimientos usados en la resolución de problemas utilizando diversos métodos, empleando recursos tecnológicos interacción con sus pares.		**S2**. Elementos geométricos
		S3. Elementos Variacionales.
		S4. Manejo de datos e incertidumbre.
C2M1. Observa y obtiene información situación o fenómeno para estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.	**C2.** Procesos de intuición y razonamiento	**S3.** Pensamiento formal
C3M1. Selecciona modelo matemático por la pertinencia de variables y relaciones para explicar una situación, fenómeno o resolver un problema tanto teórico como de su contexto.	**C3.** Solución de problemas y modelación	**S1**. Uso de modelos
C3M3. Aplica procedimientos, técnicas y lenguaje matemático para la solución de problemas propios del pensamiento matemático, de áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno.		**S3.** Estrategias heurísticas y ejecución de procedimientos no rutinarios.

Lectura: Definición de la Derivada.

Concepto.

Imagen realizada en Copilot.

¿Te has preguntado alguna vez qué tan rápido crece una planta, a qué velocidad acelera un auto o cómo cambia la temperatura a lo largo del día? Todas estas situaciones tienen algo en común: **el cambio**. Como podemos observar en las diversas situaciones que vivimos en el día a día, las matemáticas tienen un papel fundamental del porqué pasan las cosas.

El cálculo tiene una herramienta poderosa para describir estos cambios con precisión. Hoy vamos a descubrir cómo, a través del concepto de derivada, podemos medir y entender esos cambios en la vida real.

Imagina que estás caminando por una montaña y anotas cada 5 minutos qué tan alto has subido. Notas que a veces subes rápido y otras veces despacio. Si calculas la diferencia de altura entre dos puntos y la divides por el tiempo transcurrido, obtienes tu velocidad promedio. Esto es lo que se llama **una razón de cambio promedio**.

Podemos observar que en la vida diaria se determinan cambios en diversas situaciones de tipo natural, económico, social, etc., variaciones en las que algunas magnitudes que tienen cambio, como pueden ser la temperatura, el volumen de un fluido, la carga eléctrica, una población de bacterias y la velocidad de objetos o personas.

Ahora, te has preguntado ¿Qué pasaría si quisiéramos saber qué tan rápido vas exactamente **en un instante específico**? Para eso necesitamos una herramienta más precisa: **la derivada**.

Derivar una función significa encontrar su **tasa de cambio** o **pendiente**. Es como ver qué tan rápido sube o baja una curva en un punto. Las derivadas se usan para entender el movimiento, el crecimiento o la disminución en muchos contextos: física, economía, biología, etc. Recordemos pues que, existen reglas de derivación de ciertas formas normales que se presentan con frecuencia, las cuales se presentan en la siguiente tabla:

REGLA	FORMULA	ENUNCIADO	EJEMPLOS	SOLUCION
Derivada de una constante	$\frac{d}{dx}(c) = 0$ Donde c es cualquier numero	La derivada de una constante (número) siempre será cero.	y = 5	$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(5) = 0$
			y = -20	$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(-20) = 0$
Derivada de una variable con respecto a si misma	$\frac{d}{dx}(x) = 1$	La derivada de una variable con respecto a si misma es la unidad.	y = x	$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x) = 1$
Derivada del producto de una constante por una función	$\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{d}{dx}(u)$ Donde: c = constante u = función	La derivada del producto de una constante por una función es igual al producto de la constante por la derivada de la función.	y = 2x	$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(2x) = 2\frac{d}{dx}(x) = 2(1) = 2$
			y = -3x	$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(-3x) = -3\frac{d}{dx}(x) = -3(1) = -3$
Derivada de la potencia de una variable	$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$	La derivada de la potencia de una variable de exponente constante es igual al producto del exponente por la variable elevada a su exponente disminuido en una unidad.	y = x^3	$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3) = 3\frac{d}{dx}(x^{3-1}) = 3(x^2) = 3x^2$
			y = $-x^4$	$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(-x^4) = -4\frac{d}{dx}(x^{4-1}) = -4(x^3) = -4x^3$

TPV1-SA1-ACT03. Problemario.

Instrucciones

Resuelve en binas o en triadas el ejercicio siguiente de acuerdo con la información de la tabla anterior.

REGLA	FORMULA	EJEMPLOS	SOLUCION
Derivada de una constante	$\frac{d}{dx}(c) = 0$ Donde c es cualquier numero	$y = -100$	
		$y = 3$	
Derivada de una variable con respecto a si misma	$\frac{d}{dx}(x) = 1$	$y = x$	
Derivada del producto de una constante por una función	$\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{d}{dx}(u)$	$y = 7x$	
		$y = -4x$	
Derivada de la potencia de una variable	$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$	$y = x^2$	
		$y = -x^5$	

POR UNA EDUCACIÓN QUE GENERA CAMBIO

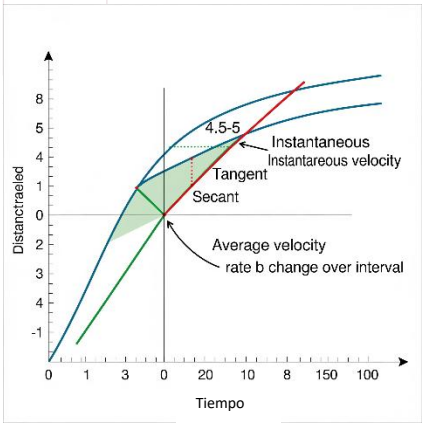


Imagen realizada en Gemini

Como te darás cuenta, la pendiente de la **recta tangente** y la **velocidad instantánea** son manifestaciones de la misma idea básica. Si este límite existe, decimos que f es derivable en x. Determinar una derivada recibe el nombre de **derivación**.

Como ya vimos en Pensamiento matemático III, la **razón de cambio instantánea** es la medida que nos indica cómo se modifica o cambia una variable en relación con otra. Se trata de la magnitud que compara dos variables a partir de sus unidades de cambio. En caso de que las variables no estén relacionadas, tendrán una razón de cambio igual a cero (0).

La razón de cambio más frecuente es la velocidad, que se calcula dividiendo un trayecto recorrido por una unidad de tiempo. Esto quiere decir que la velocidad se entiende a partir del vínculo que se establece entre la distancia y el tiempo. De acuerdo con cómo se modifica la distancia recorrida en el tiempo por el movimiento de un cuerpo, podemos conocer cuál es su velocidad.

Hemos visto que la pendiente de **la recta tangente** y la **velocidad instantánea** son manifestaciones de la misma idea; además de que el crecimiento de una planta es la tasa de cambio de la altura con respecto al tiempo, la velocidad de disolución de químicos, la densidad de un alambre para realizar trabajos.

La velocidad de un vehículo es la tasa de cambio de la distancia con respecto al tiempo, son otras versiones del mismo concepto básico. En cálculo se estudia este concepto con el nombre de **derivada,** el cual añadiremos a función y límite como una de las palabras clave del cálculo.

Definición: La derivada de una función f es otra función f’ (léase “f prima”) cuyo valor en cualquier número x es La derivada de una función es un concepto matemático que describe la tasa de cambio instantánea de la función respecto a su variable independiente. Formalmente, la derivada de una función f(x) en un punto x = a se define como el límite de la tasa de cambio promedio de la función cuando el intervalo se aproxima a cero. Esta definición se expresa matemáticamente como:

Donde:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

f’(a) : es la derivada de la función ***f*** en el punto ***a***

h : es un pequeño incremento en la variable ***x***

f(a + h) - f(a) : es el cambio en el valor de la función cuando ***x*** cambia de ***a*** a ***a+h***

$\lim_{h\to 0}$: es el límite de la función cuando ***h*** tiende a ***0***

Regla general de derivación (regla de los 4 pasos).

Sí

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Entonces

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Primer paso: Dar a $\boldsymbol{x}$ un incremento Δx, y calcular el nuevo valor de la función $\boldsymbol{y} + \Delta \boldsymbol{y}$.

$$f(x+\Delta x)$$

Segundo paso: Restar algebraicamente la función original a la función incrementada y simplificar, para hallar así $\Delta \boldsymbol{y}$.

$$f(x+\Delta x) - f(x)$$

Tercer paso: Dividir la expresión $\Delta \boldsymbol{y}$ entre $\Delta \boldsymbol{x}$ y simplificar algebraicamente, teniendo así la razón de cambio.

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Cuarto paso: Calcular el límite del cociente anterior cuando $\Delta \boldsymbol{x}$ tiende a cero. El límite así hallado es la derivada buscada.

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

POR UNA EDUCACIÓN QUE GENERA CAMBIO

Ejemplo de una función utilizando la regla de los 4 pasos.

Vamos a encontrar la derivada de la función $f(x) = 2x + 3$ usando la regla de los cuatro pasos.

Paso 1: Formular $\boldsymbol{f(x + \Delta x)}$.

Como $f(x) = 2x + 3$ es una función lineal, entonces, el valor es

$f(x + \Delta x) = 2(x + \Delta x) + 3$. Se multiplican quedando

$= 2x + 2\Delta x + 3$

Segundo Paso (Restar): Calculamos $\boldsymbol{\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)}$

$f(x + \Delta x) - f(x)$.

$\Delta y = 2x + 2\Delta x + 3 - [2x + 3]$ Se multiplica el signo por la f(x)

$\Delta y = 2x + 2\Delta x + 3 - 2x - 3$ Se suman y restan los términos semejantes.

$\Delta y = 2\Delta x$

Tercer Paso. Dividir la expresión $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ entre Δx

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = Se\ coloca\ el\ resultado\ del\ paso\ 2. \Delta y = 2\Delta x.$$

$$\frac{2\Delta x}{\Delta x} = Se\ eliminan\ los\ \Delta x. quedando\ como\ resultado\ 2.$$

Cuarto paso: Calculamos el límite.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}\ colocando\ los\ resultados\ de\ los\ pasos\ anteriores.$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} 2. = 2$$

Reforzando los conocimientos.

Aquí podrás encontrar ejemplos resueltos de funciones cuadráticas y cúbicas.

Función ¡Escanéame!

Función cúbica ¡Escanéame!

Ejemplo aplicado.

Un automóvil inicia su recorrido desde el reposo en una carretera recta. Su posición en metros respecto al tiempo (en segundos) está dada por la función $f(t) = 4t^2$. Un grupo de ingenieros necesita conocer no solo la velocidad media del auto en ciertos intervalos, sino también su **velocidad exacta en un instante específico**.

a) ¿Cómo podrían estimarla, y qué herramientas matemáticas necesitan para calcularla con precisión?
b) ¿Qué sucede con la razón de cambio al hacer Δt→0?

Solución:

Paso 1: Comprender el problema

- Como observamos en el problema, el automóvil **parte del reposo**, lo que significa que inicialmente su velocidad es 0.
- Su posición (en metros) está dada como función del tiempo (en segundos).
- Nos piden dos cosas:
    1. **Velocidad media** en ciertos intervalos.
    2. **Velocidad exacta en un instante específico** (es decir, **velocidad instantánea**).

Paso 2: Calcular la velocidad media.

La velocidad media en un intervalo de tiempo se calcula con la fórmula:

$$v_{media}=\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$$

Usaremos esto para estimar la velocidad media en el intervalo de $t = 2$ a distintos valores cercanos.

- Intervalo de $t = 2$ a $t = 3$

$$v_{media} = \frac{f\,(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t} = \textit{Usamos la fórmula anterior y sustituimos los valores de t}$$

$$v_{media} = \frac{4(3)^2-4(2)^2}{3-2} = \textit{Realizamos las elevaciones al cuadrado.}$$

$$v_{media} = \frac{4(9)-4(4)}{1} = \textit{Realizamos las multiplicaciones.}$$

$$v_{media} = \frac{36 - 16}{1} = Realizamos\ la\ resta.$$

$$v_{media} = \frac{20}{1} = 20\ ^{m}/_{s}$$

- Intervalo de $t = 2$ a $t = 2.5$

$$v_{media} = \frac{f\ (t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = Usamos\ la\ fórmula\ anterior\ y\ sustituimos\ los\ valores\ de\ t$$

$$v_{media} = \frac{4(2.5)^2 - 4(2)^2}{2.5 - 2} = Realizamos\ las\ elevaciones\ al\ cuadrado.$$

$$v_{media} = \frac{4(6.25) - 4(4)}{0.5} = Realizamos\ las\ multiplicaciones.$$

$$v_{media} = \frac{25 - 16}{0.5} = Realizamos\ la\ resta.$$

$$v_{media} = \frac{9}{0.5} = 18\ ^{m}/_{s}$$

- Intervalo de $t = 2$ a $t = 2.1$

$$v_{media} = \frac{f\ (t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = Usamos\ la\ fórmula\ anterior\ y\ sustituimos\ los\ valores\ de\ t$$

$$v_{media} = \frac{4(2.1)^2 - 4(2)^2}{2.1 - 2} = Realizamos\ las\ elevaciones\ al\ cuadrado.$$

$$v_{media} = \frac{4(4.41) - 4(4)}{0.1} = Realizamos\ las\ multiplicaciones.$$

$$v_{media} = \frac{17.64 - 16}{0.1} = Realizamos\ la\ resta.$$

$$v_{media} = \frac{1.64}{0.1} = 16.4\ ^{m}/_{s}$$

Paso 3. ¿Qué sucede al hacer $\Delta t = 0$?

Como ya vimos en Pensamiento Matemático III, la **velocidad instantánea** es el **límite** de la velocidad media cuando Δt→0. Es decir:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f\ (t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

A esto se le conoce como la derivada de la f(t) con respecto a t.

Entonces, derivamos la función dada en el problema $f(t) = 4t^2$ usando la regla de la derivada de la potencia $\frac{d}{dx}v^n = nv^{n-1}$.

$$\frac{d}{dx}(4t^2) = 4(2)t^{2-1} = 8t$$

Calcula la velocidad instantánea cuando $t = 2$

$$8t = 8(2) = \mathbf{16}\,\boldsymbol{m}/\boldsymbol{s}$$

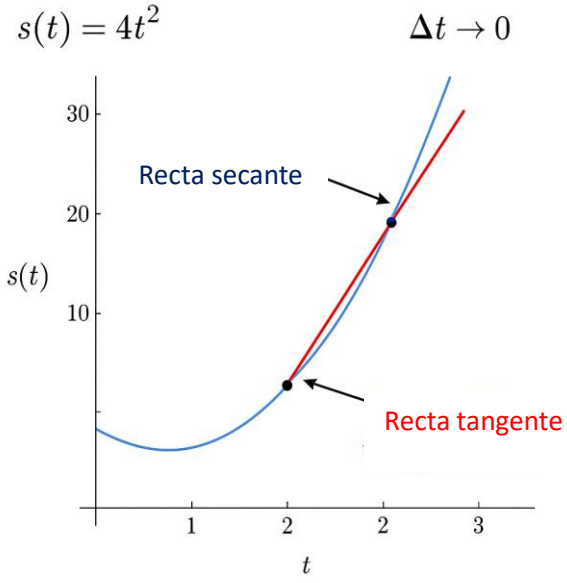
Podemos entonces para calcularla con precisión la velocidad usamos el concepto de **límite** y la herramienta matemática de la **derivada**.

Cuando Δt→0, la **velocidad media se convierte en velocidad instantánea**:

Representemos esta función para conocer el movimiento de este.

GeoGebra

¡Escanea este código QR y crea tu propia gráfica!



TPV1-SA1-ACT04. Actividad de reforzamiento.

Propósito.

Resolver el problema aplicado de la definición de derivada utilizando recursos tecnológicos.

Instrucciones.

Resuelve el ejercicio siguiente de acuerdo con la lectura de *Razón de cambio* (progresión 3).

Producto esperado

Ejercicio resuelto.

Tiempo estimado

100 minutos

Materiales sugeridos:
Guía del estudiante impreso o digital.
Ejercicios.
Libreta.

Un equipo de jóvenes del COBATAB está diseñando un sistema de control para un dron que sube verticalmente. La altitud del dron (en metros) con respecto al tiempo (en segundos) está dada por la función:

$$h(t) = 3t^2 + 2$$

Para garantizar la seguridad y eficiencia, se necesita calcular la **velocidad exacta** del dron en distintos momentos del ascenso. *Primero estiman velocidades promedio entre intervalos cortos, pero se dan cuenta de que necesitan una herramienta más precisa.*

a) ¿Cómo pueden obtener la **velocidad instantánea** en un momento exacto?
b) ¿Qué concepto matemático puede ayudarlos?
c) Modela la trayectoria de este para conocer el cambio en la trayectoria.

RECURSOS DIGITALES:

GeoGebra

Desmos

POR UNA EDUCACIÓN QUE GENERA CAMBIO

Progresión 4

Emplea la regla del producto, la regla del cociente y la regla de la cadena en situaciones-problema provenientes de recursos sociocognitivos y/o áreas del conocimiento, en donde la función que describe el fenómeno de estudio requiere el uso de una de estas reglas.

Metas de Aprendizaje	Categorías	Subcategorías
C1M1. Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de la ciencia y de su entorno.	**C1.** Procedural	**S1.** Elementos aritméticos-algebraicos.
C3M1. Selecciona un modelo matemático por la pertinencia de sus variables y relaciones para explicar una situación, fenómeno o resolver un problema tanto teórico como de su contexto.	**C3.** Solución de problemas y modelación	**S1.** Uso de modelos
C3M3. Aplica procedimientos, técnicas y lenguaje matemático para la solución de problemas propios del pensamiento matemático, de áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno.		

Lectura 2:

Breve historia de la derivada y sus aplicaciones

https://www.google.com/imgres?q=PIONEROS

En el siglo XVI comienza a modelarse matemáticamente los fenómenos de variación y cambio, pero fue en los siglos XVII y XVIII donde se registraron avances extraordinarios por las matemáticas, considerado el periodo de oro, por el desarrollo del **cálculo infinitesimal**, descubierto de forma simultánea por dos genios de las matemáticas, el inglés **Isaac Newton** (Inglaterra, 1643-1727) y el alemán **Gottfried Wilhelm Leibniz** (Alemania, 1646-1716) lo que generó una gran disputa entre estos dos geniales científicos del siglo XVII.

El descubrimiento del cálculo infinitesimal se produjo de forma independiente y casi simultánea, esto provocó una larga controversia sobre la prioridad del descubrimiento que se prolongó durante todo el siglo XVIII,

Se sabe que los dos trabajaron en forma casi simultánea pero sus enfoques son diferentes. Los trabajos de Newton están motivados por sus propias **investigaciones físicas** (de allí que tratara a las variables como "cantidades que fluyen") mientras que Leibniz conserva un **carácter más geométrico** y diferenciándose de su colega, trata a la derivada como un cociente incremental, y no como una velocidad. Leibniz no habla de derivada sino de incrementos infinitamente pequeños, a los que llama diferenciales. Un incremento de x infinitamente pequeño se llama diferencial de x, yse anota dx . Lo mismo ocurre para y (con notación dy). **Lo que Newton llamó fluxión, para Leibniz fue un cociente de diferenciales ($\frac{dy}{dx}$)**.

En nuestra era estos antecedentes se vieron en el trabajo del abogado francés **Pierre de Fermat** (1601-1665) y del inglés **Isaac Barrow** (1630-1671), teólogo y matemático inglés cuyos métodos matemáticos eran muy próximos a los del cálculo y quien fuera el maestro de **Newton**. Fermat anticipó el cálculo diferencial con su método de búsqueda de los máximos y mínimos de las líneas curvas. En el caso de Barrow, se le considera el inventor de la derivada y uno de los que anticipó las relaciones entre las derivadas y las integrales. La contribución de Leibniz a las matemáticas consistió

en enumerar en 1675 los principios fundamentales del cálculo infinitesimal. Esta explicación se produjo con independencia de los descubrimientos del científico inglés Isaac Newton, cuyo sistema de cálculo fue inventado en 1666. El sistema de Leibniz fue publicado en 1684, el de Newton en 1687, y el método de notación ideado por Leibniz fue adoptado universalmente y fue Lagrange quien empleo por primera vez el nombre de la derivada.

La derivada es una herramienta matemática que nos indica la rapidez con la que cambia una cantidad con respecto a otra. En términos simples, nos dice cómo una función varía en un punto determinado.

Aplicaciones de las derivadas

Las derivadas tienen una gran variedad de **aplicaciones en física**, ya que pueden utilizarse para modelar el comportamiento de sistemas físicos.

Como analizar el **movimiento** de los objetos ya sea para hallar la velocidad o la aceleración, en la **termodinámica** al analizar el comportamiento del calor y la energía, **electromagnetismo** ene l estudio eléctricos de los campos eléctricos y magnéticos, en **mecánica de fluidos** donde se utilizan para modelar el comportamiento de los fluidos en movimiento, en la **óptica** donde se modela el comportamiento de la luz y predecir su comportamiento futuro, en **mecánica cuántica** donde se describe el comportamiento de las partículas subatómicas.

En la **ciencia y la tecnología**, las derivadas son principalmente usadas para modelar sistemas y resolver problemas de optimización.

En **ingeniería**, las derivadas son usadas para optimizar los diseños, Por ejemplo, para minimizar el peso de un ala de avión sin perder su resistencia o optimizar las dimensiones de una estructura con el fin de reducir el uso del material mientras se mantiene su resistencia, en la **química** las reacciones químicas puede ser modelada usando derivadas, en los **procesamientos de imagen** se utilizan para encontrar los puntos en los que la intensidad de la imagen cambia rápidamente, que corresponden a bordes en la imagen, analizar el comportamiento de circuitos eléctricos (**ingeniería eléctrica**).

Las derivadas tienen un gran impacto en nuestra **vida cotidiana**, ya que las aplicaciones mencionadas anteriores permiten el uso de tecnologías como GPS, vehículos optimizados y automatización industrial. Algunas aplicaciones adicionales de las derivadas.

En la previsión **meteorológica** para predecir el movimiento de las masas de aire y la formación de tormentas, En la **navegación** para calcular la razón de cambio de la posición de un vehículo, también conocida como velocidad, **deporte de alto rendimiento** para medir la razón de cambio de la frecuencia cardiaca o los niveles de oxígeno de una persona durante el ejercicio, en la **investigación médica** para analizar la razón de cambio de determinadas condiciones médicas como la frecuencia cardiaca.

En **finanzas y economía**, las derivadas de funciones matemáticas se utilizan para modelizar y analizar diversos sistemas financieros y económicos.

En la **economía** se usa para modelar el comportamiento de la oferta y la demanda de un producto con respecto al precio, en la **bolsa de valores** al encontrar una optimización que maximice la inversión minimizando el riesgo, en las **finanzas** al modelar el comportamiento de los tipos de interés y en los **modelos económicos** analiza la relación entre factores de producción y crecimiento económico.

Como vimos en la progresión anterior podemos encontrar la derivada de diversas funciones mediante un procedimiento que llamamos "la regla de los 4 pasos" $\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{\Delta x \to \infty} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, sin embargo, este puede resultar extenso y complejo dependiendo de la función con la que estemos trabajando. Por eso, veremos cómo encontrar la derivada de diferentes funciones de un modo más fácil, utilizando una serie de **fórmulas** que fueron desarrolladas hace varios siglos, a las cuales llamaremos "fórmulas o reglas de derivación".

Si tenemos una función $y = f(x)$, la notación de derivada es muy variada como lo veremos en el siguiente cuadro:

Fundadores del alculo	Formas de representar la derivada			
Leibniz	$\boldsymbol{\frac{dy}{dx}}$	$\boldsymbol{\frac{d}{dx}(y)}$	$\boldsymbol{\frac{df}{dx}}$	$\boldsymbol{\frac{d}{dx}f(x)}$
Newton	$\dot{x}$			
Lagrange	$\boldsymbol{y'}$	$\boldsymbol{f'}$	$\boldsymbol{f'(x)}$	
Cauchy	$D_x y$	$D_x f$	$D_x f(x)$	
Jacobi	$\frac{\partial f}{\partial x}$	$\frac{\partial f}{\partial y}$	$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$	$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$

Las formas más utilizadas para escribir la derivada de una función son la notación de Leibniz y de Lagrange, para el desarrollo de la progresión haremos uso de la nomenclatura que propuso Leibniz

Para las siguientes fórmulas de derivadas vamos a considerar a $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ funciones y a $\boldsymbol{n} \in R$

Formula	Derivada de función
$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$	**Potencia**
$\frac{d}{dx}(u * v) = u\frac{d}{dx}(v) + v\frac{d}{dx}(u)$	**Producto**
$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{d}{dx}(u) - u\frac{d}{dx}(v)}{v^2}$	**Cociente**
$\frac{d}{dx}(e^u) = e^u\frac{du}{dx}$	**Exponencial**

Para las formulas de derivada podemos encontrar fórmulas para los diferentes tipos de funciones como las algebraicas, trascendentales y trigonométricas.

Reforzando los conocimientos.

Visita la siguiente página web, donde hallaras las fórmulas para cada tipo de función, ejemplificando cada una de ellas. (PAGINA WEB)

Aprendiendo a derivar

¡Escanéame!

REGLA DE PRODUCTO

Si $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ son funciones diferenciales, entonces:

$$\frac{d}{dx}[u * v] = u\frac{d}{dx}v + v\frac{d}{dx}u.$$

Ejemplo 1:

Diferenciar (o derivar) $y = (4x - 1)(x^2 + 3)$

Solución:

Por la regla del producto:

Identificamos las funciones $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$

$$u = (4x - 1) \quad y \quad v = (x^2 + 3)$$

función u | derivada de v | función v | derivada de u

$$\frac{dy}{dx} = (4x - 1)\frac{d}{dx}(x^2 + 3) + (x^2 + 3)\frac{d}{dx}(4x - 1)$$

$$\frac{dy}{dx} = (4x - 1)(2x) + (x^2 + 3)(4)$$ ← Derivar las funciones

$$\frac{dy}{dx} = 8x^2 - 2x + 4x^2 + 12$$ ← Desarrolla

$$\frac{dy}{dx} = 12x^2 - 2x + 12$$ ← Reducir términos semejantes.

Ejemplo 2:

Diferenciar (o derivar) $y = (4x^3 + 2x)(2x^2 - x)$

Solución:

Por la regla del producto:

Identificamos las funciones $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$

$$\boldsymbol{u} = (4x^3 + 2x) \quad y \quad \boldsymbol{v} = (2x^2 - x)$$

función $\boldsymbol{u}$ | derivada de $\boldsymbol{v}$ | función $\boldsymbol{v}$ | derivada de $\boldsymbol{u}$

$$\frac{dy}{dx} = (4x^3 + 2x)\frac{d}{dx}(2x^2 - x) + (2x^2 - x)\frac{d}{dx}(4x^3 + 2x)$$ ← Derivar las funciones

$$\frac{dy}{dx} = (4x^3 + 2x)(4x - 1) + (2x^2 - x)(12x^2 + 2)$$ ← Desarrolla

$$\frac{dy}{dx} = 16x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 2x + 24x^4 + 4x^2 - 12x^3 - 2x$$ ← Reducir términos semejantes.

$$\frac{dy}{dx} = 40x^4 - 16x^3 + 12x^2 - 4x$$

Recurso audiovisual.

Para saber más sobre la derivada de producto puedes observar el siguiente video escaneando el código QR:

Derivada de producto

¡Escanéame!

REGLA DEL COCIENTE

Si $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ son funciones diferenciales, entonces:

$$\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dx}}\left[\frac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{v}}\right]=\frac{\boldsymbol{v}\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dx}}\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dx}}\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{v^2}}$$

Ejemplo 1:

Derivar $y=\frac{3x+1}{2x-5}$

Solución:

Por la regla del cociente:

Identificamos las funciones $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$

$$\boldsymbol{u}=3x+1 \quad y \quad \boldsymbol{v}=2x-5$$

función $\boldsymbol{v}$ | derivada de $\boldsymbol{u}$ | función $\boldsymbol{u}$ | derivada de $\boldsymbol{v}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(2x-5)\frac{d}{dx}(3x+1)-(3x+1)\frac{d}{dx}(2x-5)}{(2x-5)^2}$$

cuadrado de $\boldsymbol{v}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(2x-5)(3)-(3x+1)(2)}{(2x-5)^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{6x-15-6x-2}{(2x-5)^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-17}{(2x-5)^2}$$

Ejemplo 2:

Derivar $y = \frac{x^2}{x^2+x+1}$

Solución:

Por la regla del cociente:

Identificamos las funciones $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$

$$\boldsymbol{u} = x^2 \quad y \quad \boldsymbol{v} = x^2 + x + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2 + x + 1)\frac{d}{dx}(x^2) - (x^2)\frac{d}{dx}(x^2 + x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2 + x + 1)(2x) - (x^2)(2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^3 + 2x^2 + 2x - 2x^3 - x^2}{(x^2 + x + 1)^2}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 2x}{(x^2 + x + 1)^2}}$$

Ejemplo 3:

Derivar $y = \frac{(2x+1)(x-5)}{3x+2}$

Solución:

Observamos que en el numerador tenemos un producto de funciones, un primer paso que podemos realizar, es desarrollarlo:

$$y = \frac{2x^2 - 10x + x - 5}{3x + 2}$$

Simplificamos términos semejantes en el numerador:

$$y = \frac{2x^2 - 9x - 5}{3x + 2}$$

Ahora, por la regla del cociente:

Identificamos las funciones $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$

$$\boldsymbol{u} = 2x^2 - 9x - 5 \quad y \quad \boldsymbol{v} = 3x + 2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2x^2 - 9x - 5)\frac{d}{dx}(3x + 2) - (3x + 2)\frac{d}{dx}(2x^2 - 9x - 5)}{(3x + 2)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2x^2 - 9x - 5)(3) - (3x + 2)(4x - 9)}{(3x + 2)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x^2 - 27x - 15 - 12x^2 + 27x - 8x + 18}{(3x + 2)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-6x^2 - 8x + 3}{(3x + 2)^2}$$

Recurso audiovisual.

Para saber más sobre la derivación de cociente puedes observar el siguiente video escaneando el código QR:

Derivada de cociente

¡Escanéame!

REGLA DE LA POTENCIA PARA FUNCIONES

Si $\boldsymbol{n}$ es un entero y $\boldsymbol{u}$ es una función diferenciable, entonces:

$$\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dx}}\boldsymbol{u^n} = \boldsymbol{nu^{n-1}} \cdot \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dx}}\boldsymbol{u}$$

POR UNA EDUCACIÓN QUE GENERA CAMBIO

Ejemplo 1:

Derivar $y = (4x)^{100}$

Solución:

Aplicando la regla de la potencia:

Identificamos la función $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{n}$; $\boldsymbol{u = 4x}$ y $\boldsymbol{n = 100}$

$$\frac{dy}{dx} = 100(4x)^{100-1}\frac{d}{dx}(4x)$$

$$\frac{dy}{dx} = 100(4x)^{99}(4)$$

$$\frac{dy}{dx} = 400(4x)^{99}$$

Ejemplo 2:

Derivar $y = \frac{1}{(5x+2)^3}$

Solución:

Se escribe la función dada como:

$$y = (5x+2)^{-3}$$

$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$

Identificamos la función $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{n}$; $\boldsymbol{u = 5x + 2}$ y $\boldsymbol{n = -3}$

Aplicando la regla de la potencia:

$$\frac{dy}{dx} = -3(5x+2)^{-3-1}\frac{d}{dx}(5x+2)$$

$$\frac{dy}{dx} = -3(5x+2)^{-4}(5)$$

$$\frac{dy}{dx} = -15(5x+2)^{-4}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{15}{(5x+2)^4}$$

Recurso audiovisual.

Para saber más sobre la derivación de potencia puedes observar el siguiente video escaneando el código QR:

Derivada de potencia

¡Escanéame!

REGLA DE LA CADENA

Es un teorema del cálculo que se utiliza para encontrar la derivada de una función compuesta por dos funciones derivables. Podríamos utilizar todas las técnicas que ya hemos aprendido para diferenciarla. Sin embargo, utilizar todas esas técnicas para descomponer una función en partes más simples que podamos diferenciar puede resultar tedioso. En vez de eso, utilizamos la regla de la cadena, que establece que la derivada de una función compuesta es la derivada de la función exterior evaluada en la función interior por la derivada de la función interior.

Regla de la Cadena: Si $y = f(u)$ es una función diferenciable de u y $u = g(x)$ es una función diferenciable de x, entonces $y = f\big(g(x)\big)$ es una función derivable de x y simbólicamente lo expresamos mediante la siguiente formula:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Ejemplo: Usando la regla de la cadena para calcular la derivada de la función $f(x) = (5x^2 - 3)^8$

Identificando la función $u = g(x) = 5x^2 - 3$ entonces $y = f(u) = u^8$

Calculando la derivada $\frac{dy}{du} = 8u^7$ y $\frac{du}{dx} = 10x$

Usando la regla de la cadena se tiene

POR UNA EDUCACIÓN QUE GENERA CAMBIO

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 8u^7(10x) = 8(5x^2 - 3)^7(10x)$$

Expresamos la derivada simbólicamente

$$\frac{df(x)}{dx} = 8(5x^2 - 3)^7(10x)$$

Ejemplo: Usando la regla de la cadena para calcular la derivada de la función $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

Identificando la función $u = g(x) = \sqrt{x}$ entonces $y = f(u) = e^u$

Calculando la derivada $\frac{dy}{du} = e^u$ y $\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Usando la regla de la cadena se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^u\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = e^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

Expresamos la derivada simbólicamente

$$\frac{df(x)}{dx} = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)e^{\sqrt{x}}$$

Recurso audiovisual.

Para saber más sobre la derivación de la regla de la cadena puedes observar el siguiente video escaneando el código QR:

Derivada de potencia

¡Escanéame!

Evaluar un punto en la derivada

Significa encontrar el valor de la derivada de una función en un punto específico. La derivada representa la tasa de cambio instantánea de la función en ese punto y geométricamente

corresponde a la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en ese punto. Para evaluar una derivada, primero se encuentra la expresión de la derivada de la función (generalmente usando reglas de derivación) y luego se sustituye el valor específico de la variable en esa expresión.

Ejemplo:

Función	Derivada	Evaluación en $x = 2$
$f(x) = 3x^2 + 3x - 5$	$\frac{df(x)}{dx} = 6x + 3$	$\frac{df(x=2)}{dx} = 6(2) + 3 = 12 + 3 = 15$
$f(x) = \sqrt{x+1}$	$\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{2}(x+1)^{-1/2}$	$\frac{df(x=2)}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{2+1}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$
$f(x) = e^{3x}$	$\frac{df(x)}{dx} = 3e^{3x}$	$\frac{df(x=2)}{dx} = 3e^{3(2)} = 3e^6 = 3(403.42) = 1210.28$

Problema aplicado:

La eficiencia de combustible de un automóvil, medida en kilómetros por litros $(\frac{km}{L})$, depende de la velocidad v $(\frac{km}{h})$ y esta modelada por la función:

$$E(v) = -0.02v^2 + 1.2v + 10$$

Hallar:

1. Calcular la derivada de $E(v)$
2. Evaluar la derivada en $v = 30\ km/h$
3. Interpretar el resultado.
4. Graficar para v-0.02erificar si es un máximo.

Solución:

1.-

$$\frac{dE(v)}{dv} = \frac{d}{dv}(-0.02v^2 + 1.2v + 10) = \frac{d}{dv}(-0.02v^2) + \frac{d}{dv}(1.2v) + \frac{d}{dv}(10)$$

$$= -0.02\frac{d}{dv}(v^2) + 1.2\frac{d}{dv}(v) + (0)$$

$$= -0.02(2v) + 1.2(1)$$

$$= -0.04v + 1.2$$

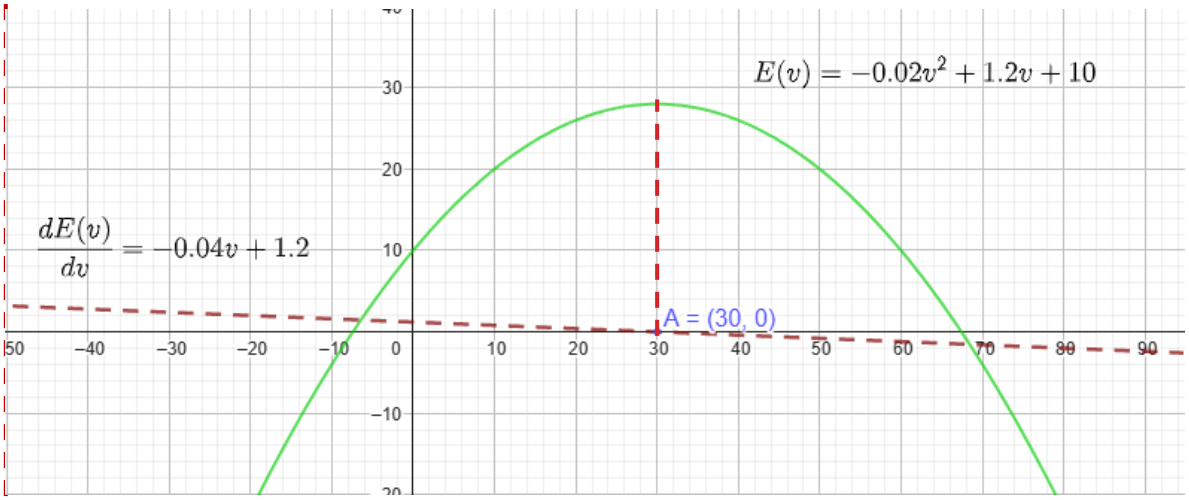
2.- Evaluando el resultado en $v = 30\ km/h$

$$\frac{dE(v=30)}{dv} = -0.04(30) + 1.2 = -1.2 + 1.2 = 0$$

3.- Interpretación

Cuando la derivada es cero, significa que la eficiencia no está aumentando ni disminuyendo en ese punto. Lo que se siguiere que podría ser un máximo o mínimo

4.- Grafica



Como podemos observar la eficiencia de combustible es máxima cuando el automóvil viaja a $30\ km/h$, a esa velocidad el vehículo logra el mejor rendimiento en km/L

Ejemplo 2.- La eficiencia de una batería solar, en función del tiempo de exposición del sol x, (en horas), esta dada por la función:

$$E(x) = \frac{5x}{e^x}$$

Donde:

- $E(x)$ es la eficiencia en el porcentaje.
- e^t representa el crecimiento exponencial de la temperatura interna, que reduce la eficiencia con el tiempo.

Hallar:

1) La derivada de $E(x)$
2) Evaluar para $x = 0{,}1\ y\ 2\ horas$
3) Gráfica y analice los resultados

Solución 1)

$\frac{dE(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{5x}{e^x}\right)$ donde $u(x) = 5x \quad y \quad v(x) = e^x$

De acuerdo con la fórmula de cociente

$$\frac{dE(x)}{dx} = \frac{5e^x - 5xe^x}{(e^x)^2} = \frac{5e^x(1-x)}{e^{2x}}$$

$$\frac{dE(x)}{dx} = \frac{5(1-x)}{e^x}$$

2)

Evaluamos para $x = 0{,}1\ y\ 2\ horas$

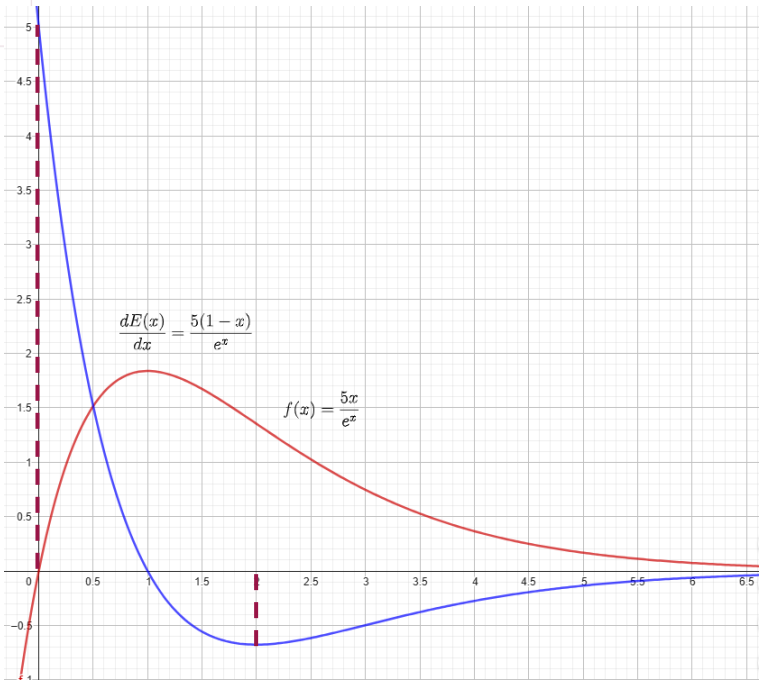
$$x = 0\ \ horas \qquad \frac{dE(x=0)}{dx} = \frac{5(1-0)}{e^0} = \frac{5(1)}{1} = 5$$

$$x = 1\ \ horas \qquad \frac{dE(x=1)}{dx} = \frac{5(1-1)}{e^1} = \frac{5(0)}{2.7182\ldots} = 0$$

$$x = 2\ \ horas \qquad \frac{dE(x=2)}{dx} = \frac{5(1-2)}{e^2} = \frac{5(-1)}{7.389\ldots} = -0.676$$

POR UNA EDUCACIÓN QUE GENERA CAMBIO

3)



La derivada negativa indica que la eficiencia esta disminuyendo en ese momento. Es decir que, a las dos horas, la eficiencia de la batería solar disminuye aproximadamente en 0.676% por hora.

Cuando la derivada es cero el sistema alcanza su máxima eficiencia de carga, es decir que exactamente en una hora después de iniciar la exposición solar comienza a disminuir debido al aumento de temperatura interna.

La derivada es positiva se debe entender que la carga de la batería esta completa, es decir para cuando x es igual a cero.

Problemario TPV1-SA**1-ACT05**

Calcula las derivadas de las siguientes funciones utilizando correctamente las fórmulas y reglas de derivación estudiadas anteriormente (regla de la potencia, suma, producto, cociente y regla de la cadena).

1. $y = (2x^3 - 5)(8x + 4)$
2. $y = (4x - 5)(x^3 - 4x)$
3. $y = \frac{3x-7}{4x+5}$
4. $y = \frac{x^3-6}{x^2}$
5. $y = (5x - 6)^9$
6. $y = (2 - 5x)^{-5}$

POR UNA EDUCACIÓN QUE GENERA CAMBIO

TPV1-SA1-EP01. Cuestionario tipo PLANEA.

Nombre_____. Grupo_____.

Instrucciones: Indicaciones Lee cuidadosamente cada reactivo e individualmente elige la opción de respuesta correcta

1.- Un estudiante aplica la definición de derivada para $f(x) = x^2$ usando la regla de los cuatro pasos. ¿Cuál es el resultado correcto al final del procedimiento?

a) $2x$.
b) $2x^2$.
c) 2.
d) x.

2. La derivada de la función posición de un objeto móvil indica:

a) El lugar donde inicia el objeto.
b) El cambio total en la posición durante el viaje.
c) La rapidez con la que cambia su posición en un instante.
d) El tiempo total que duró el recorrido.

3. Una partícula se desplaza de forma tal que su posición está dada por la función:

$$s(t) = t^2 \cdot \cos t$$

a) Multiplicar directamente las funciones.
b) Derivar usando la regla del producto.
c) Aplicar la derivada de cos(t) solamente.
d) Sumar las derivadas de t^2 y $\cos t$

4.La concentración de una sustancia varía con el tiempo según la función:

$$C(t) = \frac{e^t \cdot In\ (t)}{t^2}$$

a) Regla del producto únicamente.
b) Solo regla de la cadena.
c) Regla del cociente y producto.
d) Ninguna, se deriva directamente.

5. **Es el resultado del binomio al cuadrado** $(3x^2 - 9y^6)^2$
   a) $9x^2 + 54x^2y^6 + 81y^6$
   b) $9x^4 - 54xy + 81y^{12}$
   c) $9x^2y^2 - 54x + 81y^6$
   d) $9x^4 - 54x^2y^6 + 81y^{12}$
6. **Es la factorización del trinomio** $x^2 - 7x - 18$
   a) $(x - 9)(x - 2)$
   b) $(x + 9)(x + 2)$
   c) $(x + 9)(x - 2)$
   d) $(x - 9)(x + 2)$
7. **Es la factorización de la expresión** $49z^2 - 81w^2$
   a) $(9w - 7z)(9w + 7z)$
   b) $(9w + 7z)(9w + 7z)$
   c) $(7z - 9w)(7z + 9w)$
   d) $(7z - 9w)(7z - 9w)$
8. **Es el valor de la función** $f(x) = 3x^2 - 5x - 2$ **en** $x = -3$
   a) $f(3) = 10$
   b) $f(-3) = -40$
   c) $f(-3) = 40$
   d) $f(-3) = -10$
9. **Es el valor del límite** $\lim_{x \to -5} \frac{x^2 - 25}{x^2 + 2x - 15}$
   a) 0
   b) $\frac{4}{5}$
   c) $\frac{5}{4}$
   d) $\frac{0}{0}$
10. **Es el valor del límite** $\lim_{x \to \frac{2}{3}} 3x^2 - 2$
   a) $-\frac{2}{3}$
   b) $\frac{2}{3}$
   c) $\frac{3}{2}$
   d) $-\frac{3}{2}$

TPV1-SA1-LC01 Lista de Cotejo1

Portafolio de Evidencias de las Actividades de Reforzamiento

Instrumento de evaluación

Datos Generales			
Nombre de los estudiantes		**Matricula**	
Producto esperado	PORTAFOLIO DE EVIDENCIAS	**Fecha**	
Nombre del docente		**Firma del docente**	

	CRITERIOS	%	CUMPLE		Puntaje
			SI	NO	
1.	Presentar el portafolio en la fecha y hora establecidas, mostrando puntualidad y responsabilidad.	**10**			
2.	Incluye una portada que contenga todos los datos de identificación relevantes, tales como número de plantel, semestre, grupo, bloque, nombre completo, nombre de la Unidad de Aprendizaje Curricular (UAC) y del docente, además de especificar claramente el objetivo de la UAC, la fecha y el lugar.	**10**			
3.	Presentar una estructura organizada y ordenada de acuerdo con las indicaciones proporcionadas por el docente.	**10**			
4.	Las actividades incluidas en el portafolio son originales y reflejen el esfuerzo del estudiante, además están presentadas con limpieza y claridad lo que facilita su comprensión.	**20**			
5.	Contiene todos los trabajos solicitados por el docente, sin omitir ninguno.	**20**			
6.	Cada trabajo incluido en el portafolio está calificado por el docente y cuenta con su sello o firma, lo que certifica la evaluación realizada.	**30**			
		Calificación			
Aspectos para mejorar:					

TPV1-SA1-MA02 Mapa de Aprendizajes

Para evaluar las progresiones:

1,2,3 y 4

UAC:	Taller de Pensamiento Variacional I	Progresiones	1,2,3 y 4	Fecha:	
Nombre				Grupo y turno	

Situación de aprendizaje 2: Choco de corazón, máximo ingeniero de profesión

Mapa de aprendizaje

1: Necesito ayuda *2: Puedo hacerlo solo* *3: Puedo ayudar a otros*

Progresión de Aprendizaje	Nivel			Que debo hacer para mejorar:
	1	2	3	
Progresión 1: Aplica técnicas aritméticas, algebraicas y operaciones funcionales a través del planteamiento de problemáticas de las ciencias, para realizar procesos según lo requiera y adecuar la expresión matemática de manera que el estudiantado analice, compruebe e interprete sus hallazgos y resultados.				
Progresión 2: Analiza de manera formal el concepto de límite, profundizando en el cálculo de límites de funciones mediante sus teoremas para dar solución a problemáticas contextualizadas de las ciencias utilizando métodos analíticos y/o recursos tecnológicos.				
Progresión 3: Analiza la definición formal de derivada a partir del planteamiento de una situación-problema significativa para el estudiantado que evidencie la variación de una recta secante a la recta tangente, con la cual se puedan obtener las reglas de derivación para calcular derivadas de funciones, empleando en caso de ser necesario recursos tecnológicos.				
Progresión 4: Emplea la regla del producto, la regla del cociente y la regla de la cadena en situaciones-problema provenientes de recursos sociocognitivos y/o áreas del conocimiento, en donde la función que describe el fenómeno de estudio requiere el uso de una de estas reglas.				

Nombre y Firma del estudiante:	Firma del Facilitador

POR UNA EDUCACIÓN QUE GENERA CAMBIO

Referencias Bibliográficas

ANAMAT, (2020). Cálculo diferencial. EDITORIAL UEMSTIS.

COBATAB, (2024). Guía del Estudiante, Pensamiento matemático III.

COBATAB, (2021). Guía del Estudiante, Cálculo Diferencial.

BALDOR, A., & Baldor, J. A. (1998). Algebra. Publicaciones Cultural.

LARSON, R. (2012). Precalculo. Cengage Learning Editores.

HERNÁNDEZ S. Eisler, (2013). Cálculo diferencial e integral con aplicaciones. Revista digital matemática del Instituto Tecnológico de Costa Rica. Primera edición.

Sitios web

Abramson, J. (2022, mayo 18). 11.6 Teorema del binomio. Precálculo 2ed; OpenStax. https://openstax.org/books/prec%C3%A1lculo-2ed/pages/11-6-teorema-del-binomio

Situación de Aprendizaje 2:

Choco de corazón, máximo ingeniero de profesión

EVIDENCIA SIGA

Propósito de la situación

En equipos de 5 estudiantes, elaborar un reporte utilizando los recursos disponibles (físico y/o digital) donde **se muestre a detalle los cálculos para obtener el volumen máximo, así como la gráfica que lo demuestre, utilizando los temas de las progresiones 6, 7 y 8**, presentar ante el grupo **para su socialización y validación.**

Progresiones para desarrollar

PROGRESIÓN 5	*Analiza* el teorema de valor medio y Teorema de Rolle, así como su utilidad en el planteamiento y solución a problemas de la vida cotidiana o del entorno que le rodea de manera que el estudiantado *analice, compruebe e interprete* sus hallazgos y resultados.
PROGRESIÓN 6	*Aplica* procedimientos algorítmicos para derivar funciones implícitas y de orden superior, así como el uso de estas últimas para resolver límites indeterminados utilizando la regla de L'Hopital aplicando estas herramientas en la solución de problemas de las ciencias.
PROGRESIÓN 7	*Aplica y/o construye* modelos para encontrar la solución de situaciones-problema de su contexto, usando la derivada como una herramienta que le permite *interpretar y explicar* fenómenos de variación estudiados por las ciencias considerando herramientas analíticas y/o tecnológicas en la modelación.
PROGRESIÓN 8	*Construye* modelos matemáticos, identificando las variables que se relacionan entre sí, obteniendo de manera intuitiva la diferencial como herramienta para darle solución a problemas de las ciencias que le permita obtener información y analizar los resultados para la toma de decisiones.

Metas de Aprendizajes

- **C1M1.** Identifica regularidades o patrones, diferencias y semejanzas en un conjunto de datos, eventos, fenómenos o situaciones.
- **C1M2.** Utiliza diferentes representaciones para expresar propiedades, patrones o relaciones, y reconoce su equivalencia para describir un fenómeno o resolver un problema.
- **C2M1.** Reconoce supuestos explícitos e implícitos en un argumento, con base en la interpretación de información, datos, enunciados o símbolos.
- **C2M2.** Desarrolla la percepción y la intuición para generar una hipótesis inicial ante situaciones que requieren explicación o interpretación.
- **C2M3.** Compara hechos, opiniones o afirmaciones categóricas o la posibilidad de ocurrencia de eventos para establecer similitudes y diferencias, organizándolos en formas lógicas o convenientes útiles en la solución de problemas.
- **C2M4.** Combina diferentes procesos de razonamiento matemático al plantear un modelo o resolver un problema o una situación o fenómeno (natural, experimental o social), incluyendo los de tipo estadístico o probabilístico, e interpreta tanto el resultado como su utilidad para el entendimiento, predicción y/o reducción de riesgo.
- **C3M1.** Selecciona un modelo matemático pertinente (variables y relaciones) para explicar el fenómeno en la solución de un problema.
- **C3M2.** Construye un modelo con lenguaje matemático y lo pone a prueba para estudiar un fenómeno o situación problema (natural o social).
- **C3M3.** Explica procedimientos para la solución de problemas (de ciencias naturales, sociales, humanidades, vida cotidiana) empleando lenguaje y técnicas matemáticas.
- **C3M4.** Formula problemas matemáticos de su entorno u otras áreas, a partir de cuestionamientos, para resolverlos con estrategias, heurísticas, procedimientos informales o formales.
- **C4M1.** Esquematiza situaciones para su solución mediante el uso de datos numéricos, representación simbólica y conceptos matemáticos, dando significado acorde al contexto.

Subcategorías

Conceptual (Conocimientos integradores)	Procedimental (Componentes de áreas sugeridas)	Porcentaje Actitudinal (Dimensiones)
• **Teorema del Valor Medio.** • **Teorema de Rolle.**	• Identifica y comprueba las condiciones del Teorema de Rolle y del Valor Medio. • Interpreta gráficamente sus implicaciones en contextos reales.	• Reflexiona sobre la utilidad de los Teoremas. • Participa con disposición en el análisis de situaciones contextualizadas.
• **Derivación implícita.** • **Derivadas de orden superior.** • **Regla de L'Hopital.**	• Deriva funciones implícitas y de orden superior. • Resuelve límites con la regla de L'Hôpital en problemas científicos.	• Manifiesta perseverancia ante problemas complejos. • Reconoce el valor del análisis detallado y estructurado.
• **Modelación matemática.** • **Uso de software (GeoGebra, Wolfram Alpha, Excel).** • **Aplicaciones de la derivada (optimización, máximos, mínimos, puntos de inflexión).**	• Construye modelos matemáticos usando software. • Interpreta resultados de la derivada en contextos reales para optimizar o analizar fenómenos.	• Demuestra interés en el uso de tecnología y modelos aplicados. • Participa colaborativamente para resolver problemas.
• **Diferencial (concepto intuitivo, notación e interpretación).** • **Aplicaciones de la diferencial (aproximaciones, cálculo de errores, estimaciones).**	• Interpreta el significado de diferencial en distintos contextos. • Aplica el diferencial para estimar valores, errores o variaciones en problemas reales.	• Valora el uso del diferencial para realizar análisis precisos. • Participa activamente en la estimación y evaluación de resultados.

Situación de Aprendizaje 2

Choco de corazón, máximo ingeniero de profesión

Problema del contexto

En una plataforma petrolera ubicada costa afuera en Tabasco, se requiere recolectar muestras de **barita**, un polvo sólido y mineral denso que se añade al fluido de perforación para incrementar su densidad y así controlar la presión en el pozo.

El ingeniero a cargo necesita transportar la muestra hasta el laboratorio para su análisis, pero solo dispone de una hoja de plástico rígido tamaño carta. Planea recortar cuadrados en cada una de las esquinas para luego doblar los bordes y formar una **caja sin tapa**, que le permita contener y trasladar la mayor cantidad de muestra de forma segura y práctica.

Se ha solicitado a los estudiantes de quinto semestre la elaboración de un reporte con el objetivo de determinar cuáles son las medidas óptimas para obtener el volumen máximo. Para ello, deberán considerar lo siguiente:

1. Elaborar al menos dos modelos distintos de cajas, utilizando diferentes valores para las pestañas, con el propósito de verificar su factibilidad de uso y colocar semillas en su interior para comparar los volúmenes obtenidos *(se utilizarán semillas con fines didácticos, ya que son más accesibles en comparación con la barita, un mineral no metálico de difícil adquisición)*.
2. Obtener el modelo matemático del volumen, elaborar una tabla de valores y representar gráficamente la función, utilizando herramientas físicas o digitales como GeoGebra o Desmos.
3. Explicar paso a paso los cálculos realizados, empleando la primera y segunda derivada para determinar la medida óptima de **x**, correspondiente al lado del cuadrado recortado en las esquinas, que permita obtener el volumen máximo.
4. Escribir conclusiones claras que justifiquen por qué dichas medidas son las más adecuadas, y presentar los resultados mediante una exposición oral sencilla y convincente.

5. Finalmente, se llevará a cabo una sesión de preguntas y comentarios entre los equipos, con el fin de compartir ideas y mejorar el trabajo en conjunto.

Conflicto cognitivo

1. Si se utilizan hojas del mismo tamaño, ¿crees que el volumen obtenido será siempre el mismo? ¿por qué? ¿qué factores, además del tamaño inicial de la hoja, podrían influir en el volumen final de la caja?
2. ¿Consideras que la altura de la caja influye en el volumen que puede contener? ¿por qué?
3. ¿Cuál es el modelo matemático que representa el volumen de la caja? Elabora una tabla de valores y representa la función gráficamente con herramientas físicas o digitales.
4. Utiliza la primera derivada para determinar el valor que maximiza el volumen de la caja y da solución a la situación planteada.
5. ¿Cuáles son las dimensiones óptimas de la caja para obtener el mayor volumen posible?
6. Más allá de obtener el volumen máximo, ¿qué otras consideraciones prácticas (como la resistencia del material, la facilidad de manejo o el uso real de la caja para transportar barita) deberían tenerse en cuenta al diseñar estas cajas?
7. Si los lados de la hoja crecen un 1%, ¿cuánto aumentaría el volumen de la caja? ¿cómo nos ayuda este análisis a saber si nuestra solución sigue siendo buena, aunque cambien un poco las medidas?
8. ¿Y qué pasaría si no todos los lados crecen igual?

Instrumento de Evaluación Situación de Aprendizaje 2

TPV1-SA2-RU02 Rúbrica para evaluar la Situación de Aprendizaje 2

COLEGIO DE BACHILLERES DE TABASCO PLANTEL No. _____

TALLER DE PENSAMIENTO VARIACIONAL I

Datos de identificación			**TPV1-SA1-RU01**
Situación didáctica	**"Choco de corazón, máximo ingeniero de profesión"**	**Progresiones**	5, 6, 7, 8
Propósito de la situación	En equipos de cinco integrantes, elaborarán un reporte (digital o físico) que resuelva el conflicto cognitivo planteado, utilizando la modelación matemática, la optimización y las diferenciales para dar respuesta a la problemática planteada, y presentarlo ante el grupo para su socialización		

CATEGORIAS/SUBCATEGORIAS	
CATEGORIAS	**SUBCATEGORIAS**
C1 Procedural	**C1S1** Elementos aritméticos algebraicos **C1S2** Elementos geométricos **C1S3** Elementos variacionales C1S4 manejo de datos 3
C2 Procesos de intuición y razonamiento	**C2S1** Capacidad para observar y conjeturar **C2S2** Pensamiento intuitivo **C2S3** Pensamiento formal
C3 Solución de problemas y modelación	**C3S1** Uso de modelos **C3S2** Pensamiento intuitivo y construcción de modelos **C3S3** Estrategias heurísticas y ejecución de procedimientos no rutinarios C3S4 Manejo de datos e incertidumbre
C4 Interacción y lenguaje matemático	**C4S1** Registro escrito, simbólico, algebraico e iconográfico

Nombre de los alumnos		**Grupo**	
	N. Lista:		N. Lista:
	N. Lista:		N. Lista:
	N. Lista:		N. Lista:

Evaluación					
CATEGORÍAS	**Puntuación obtenida**	**Puntuación máxima**	**Ponderación**	**Retroalimentación**	
C1. Procedural		**4**	**20%**	**Logros**	
C2. Procesos De intuición y razonamiento		**4**	**20%**		
C3. Soluciones de problemas y modelación		**4**	**20%**		
C4. Interacción y lenguaje matemático		**4**	**20%**	**Aspectos de mejora**	
Actitudinal		**4**	**20%**		
TOTAL		**30**	**100%**		
Calificación obtenida					

Categoría	NIVEL DE PROGRESO			
	Destacado (4)	Competente (3)	Básico (2)	No presenta (1)
C1. Procedural	Identifica y clasifica todas las variables y constantes para asociarlas, creando modelos matemáticos precisos y completos.	Identifica y clasifica variables y constantes, asociándolas en modelos matemáticos correctos.	Asocia algunas variables y constantes para crear modelos matemáticos, pero con imprecisiones en su aplicación.	Asocia pocas variables y constantes para crear modelos matemáticos incorrectos.
C2. Solución de problemas y modelación	Domina la aplicación precisa de las fórmulas de derivación, evaluando en un punto, y seleccionando adecuadamente los modelos para resolver el problema.	Aplica correctamente las fórmulas de derivación y selecciona modelos adecuados, pero con errores o inconsistencias menores.	Intenta aplicar las fórmulas de derivación, pero con dificultades y limitaciones en la evaluación en un punto o en la selección de modelos.	No aplica la fórmulas de derivación o lo hacen a funciones incorrectas.
C3. Interacción y lenguaje matemático	Expresa correctamente la derivada y reconoce con precisión las unidades adecuadas. Utiliza lenguaje matemático formal, mostrando total comprensión y habilidad. .	Expresa la derivada y reconoce las unidades apropiadas, aunque con algunos errores ocasionales. Emplea un lenguaje matemático adecuado en la mayoría de los casos.	Expresa la derivada con ciertas dificultades y errores. Reconoce las unidades, pero con imprecisiones. Su lenguaje matemático es informal o tiene limitaciones.	Expresa la derivada con ciertas dificultades y errores. No reconoce las unidades. Su lenguaje matemático es informa.
Actitudinal	Colabora de forma altamente efectiva, con explicaciones claras y una gran disposición al trabajo. El reporte es organizado y metódico, cumpliendo con todos los criterios.	Colabora de forma efectiva con explicaciones claras. Muestra una disposición adecuada al trabajo. El reporte es organizado y cumple con la mayoría de los criterios.	Se relaciona de manera limitada con sus compañeros. Las explicaciones son incomprensibles. La disposición al trabajo es inconsistente. El reporte está desorganizado y solo cumple con algunos criterios.	No hubo trabajo colaborativo, El reporte está desorganizado y faltan elementos.

TPV1-SA2-ED02 Evaluación Diagnóstica

Nombre_____ Grupo_____

Instrucciones: Selecciona la respuesta correcta.

1) ¿Cómo se llama la función cuya gráfica se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel; es decir, qué se conforma de un solo trazo?

a) Continua.
b) Discontinua.
c) Escalonada.
d) Racional.

2) ¿Qué nombre recibe la función en la que se puede calcular su derivada en cualquier punto de su dominio?

a) Continua.
b) Diferenciable.
c) Racional.
d) Valor absoluto.

3) Un automóvil recorre 120 kilómetros en 2 horas sin detenerse. Sin embargo, en un tramo del camino, pasa por un radar de velocidad que marca 75 km/h. ¿Qué podemos concluir respecto a su velocidad promedio y su velocidad instantánea?

a) La velocidad promedio fue de 60 km/h y la velocidad instantánea se mantuvo constante.
b) La velocidad promedio fue de 75 km/h porque eso marcó el radar.
c) La velocidad promedio fue de 60 km/h, pero la velocidad instantánea varió durante el trayecto.
d) La velocidad instantánea siempre fue menor que la velocidad promedio.

4) De las formas para nombrar a la derivada, ¿cuál de las siguientes no es correcta?

a) $f'(x)$
b) $D_x f$
c) $\frac{dy}{dx}$
d) $F'(y)$

5) ¿En cuál de las siguientes expresiones sería necesario aplicar la derivación implícita para encontrar $\frac{dy}{dx}$?

a) $y = \cos(x)$
b) $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$
c) $x^2 + xy + y^2 = 7$
d) $y = e^x + \ln x$

6) Si $y = x^3 - 2x^2 + x$ ¿cuál es la tercera derivada de y?

a) $y''' = 6x - 4$
b) $y''' = 6$
c) $y''' = 3x^2 - 4x + 1$
d) $y''' = 0$

7) Una partícula se mueve a lo largo de una línea recta con una posición dada por $s(t) = 3t^2 - 12t + 5$, donde t es el tiempo en segundos. ¿Cuál es la velocidad instantánea de la partícula en t=2 segundos?

a) v = 2
b) v = 0
c) v = -7
d) v = 5

8) La función f(x)=x3−3x+1 tiene un mínimo local en x=1 y un máximo local en x=−1. ¿Cuál es el valor del mínimo local?

a) -1
b) 3
c) 0
d) 1

9) Si y=cos(4x), ¿cuál es la diferencial dy?

a) $dy = \sin(4x)\,dx$
b) $dy = 4\sin(4x)\,dx$
c) $dy = -\sin(4x)\,dx$
d) $dy = -4\sin(4x)\,dx$

10) ¿Cuál es la diferencial dy de la función $y = 3x^2 + 5x$?

a) $dy = 3xdx$
b) $dy = (3x + 5)dx$
c) $dy = (6x + 5)dx$
d) $dy = 6xdx$

POR UNA EDUCACIÓN QUE GENERA CAMBIO

Progresión 5

Analiza el Teorema de Valor Medio y Teorema de Rolle, así como su utilidad en el planteamiento y solución a problemas de la vida cotidiana o del entorno que le rodea de manera que el estudiantado analice, compruebe e interprete sus hallazgos y resultados.

Metas de Aprendizaje	Categorías	Subcategorías
C2M1. Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.	**C2.** Procesos de intuición y razonamiento	**S1.** Capacidad para observar y conjeturar
C2M2. Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieran explicación o interpretación.		**S3.** Pensamiento formal
C3M3. Aplica procedimientos, técnicas y lenguaje matemático para la solución de problemas propios del pensamiento matemático, de áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno.	**C3.** Solución de problemas y modelación	**S1.** Uso de modelos

Lectura: Teorema del Valor Medio

Definición

El Teorema del Valor Medio establece una relación entre la derivada de una función y su comportamiento promedio en un intervalo.

Sea una función $f(x)$ que cumple con las siguientes condiciones:

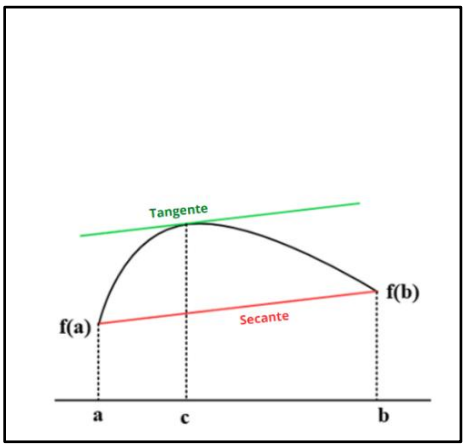
1. La función es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$
2. Es derivable en el intervalo abierto (a, b).
3. Entonces, existe al menos un valor c dentro del intervalo (a, b) tal que la derivada en ese punto es igual a la pendiente de la recta secante entre a y b, es decir:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=c} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

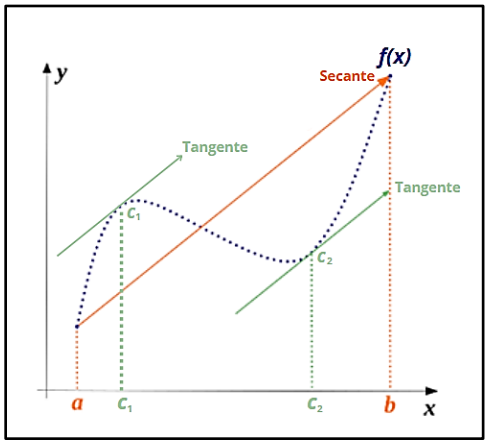
o

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

En una gráfica, se representa con una curva y una secante. El punto $\boldsymbol{c}$ es aquel donde la recta tangente a la curva es paralela a la secante que une los puntos $(a, f(a))y\ (b, f(b))$, así como puede observarse en las siguientes figuras. Cabe aclarar que puede haber en el intervalo más de un punto $\boldsymbol{c}$ tal como aparece en la segunda figura.



Representación gráfica del Teorema del Valor Medio con un solo valor de c. Nota: se agregaron las etiquetas "tangente" y "secante" Fuente: Wikipedia. (s.f.). Lagrange mean value theorem [Archivo SVG]. *Wikipedia, enciclopedia libre*. Recuperado de: https://n9.cl/bwns8



Representación gráfica del Teorema del Valor Medio con dos valores de c. Nota: se agregó la etiqueta del otro valor de c. **Fuente:** Valepert. (2009, 7 de septiembre). Mvt2 italian [Archivo SVG]. *Wikimedia Commons*. https://n9.cl/mnwaq

POR UNA EDUCACIÓN QUE GENERA CAMBIO

El Teorema del Valor Medio tiene aplicaciones tanto en la física como en situaciones cotidianas, ya que establece que existe al menos un instante $t = c$, dentro de un intervalo $[a, b]$, en el que la velocidad instantánea $f'(c)$ coincide con la velocidad promedio.

Por ejemplo, si un automóvil recorre 160 km en 2 horas. Al dividir la distancia entre el tiempo, obtenemos una **velocidad promedio** de 80 km/h. El Teorema del Valor Medio afirma que, si el movimiento del automóvil lo describe una función continua y derivable, entonces en algún instante exacto durante el trayecto, su **velocidad instantánea** marcada por el velocímetro fue exactamente de 80 km/h, aunque en otros momentos haya ido más rápido o más lento.

En términos generales, este teorema indica que hay un punto en el intervalo donde la razón de cambio instantáneo es igual a la razón de cambio promedio.

Condiciones

Como se mencionó anteriormente para que se pueda aplicar el Teorema del Valor Medio la función tiene que ser continua y derivable en el rango indicado, pero… ¿cómo saber si se cumplen ambos criterios?

Vamos a definir cada término:

- **Continuidad**: Una función es continua si puedes dibujarla **sin levantar el lápiz**.

Derivabilidad: Una función es derivable si, además de ser continua, **no tiene esquinas ni saltos bruscos** (o sea, tiene

Importante

Para aplicar el Teorema del Valor Medio, algunos autores indican que la función debe se **diferenciable**, mientras que otros la llaman **derivable**. Por ejemplo, Leithold (1998) y Aguilar Márquez et al. (2015) utilizan **diferenciable**; en cambio, Stewart (2012) y Ayres (1989) emplean **derivable**. Aunque no son sinónimos desde una perspectiva estrictamente matemática, en este contexto ambos términos se emplean de forma intercambiable.

En seguida se muestra una ilustración que te permitirá identificar si se puede aplicar el Teorema del Valor Medio.

Infografía sobre los criterios para aplicar el Teorema del Valor Medio. **Fuente**: Castillo Hdez., S. I. (2025) Docente del Plantel No. 6 ¿Cómo saber si se puede aplicar el Teorema del Valor Medio? [Imagen creada con Canva].

Es importante mencionar que algunas funciones pueden ser continuas en ciertos intervalos y presentar discontinuidades en otros. Por ejemplo, la función tangente es continua en su dominio, pero tiene discontinuidades en los puntos donde no está definida (como en $x = \pi/2, 3\pi/2$, etc.).

A continuación, se presenta el análisis de diversas funciones y sus respectivas gráficas, con el propósito de determinar si es posible aplicar el Teorema del Valor Medio en ciertos intervalos.

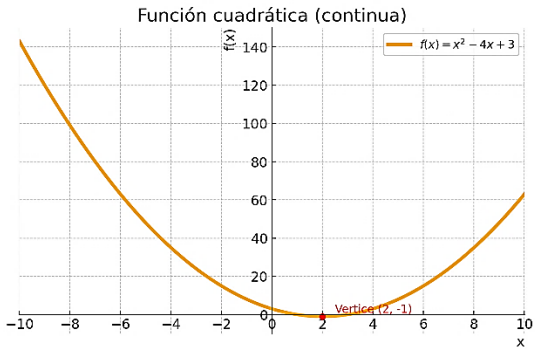
Análisis de gráficas

Función polinomial, de grado 2 (cuadrática)

Ejemplo específico:

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

Gráfica:



¿Es continua en el intervalo $[-10, 10]$?	¿Es derivable en el intervalo (-10,10)?
Sí es continua porque se puede dibujar sin levantar el lápiz.	**Sí** porque es continua y además no tiene esquinas ni saltos bruscos.

¿Se puede aplicar el Teorema del Valor Medio?

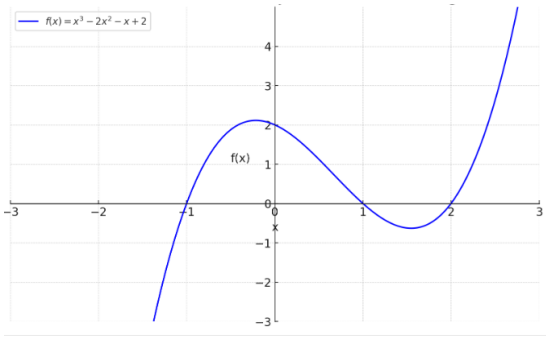
Sí porque cumple con ambos criterios.

Función polinomial, de grado 3 (cúbica)

Ejemplo específico:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

Gráfica:



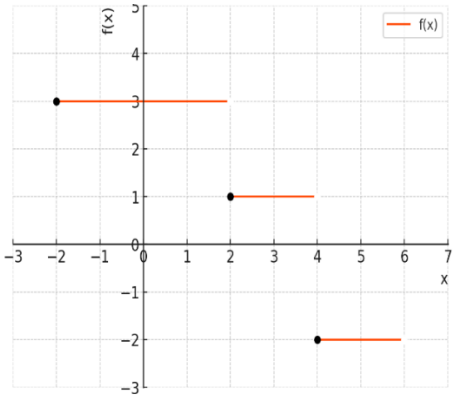
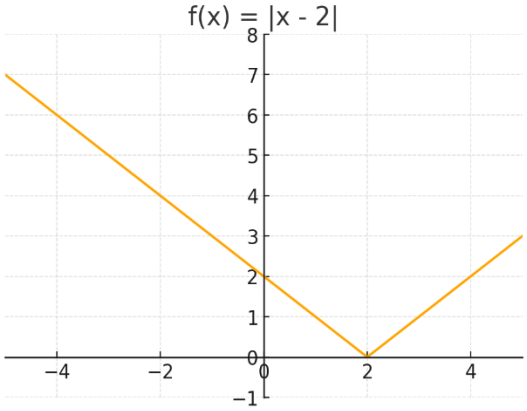
¿Es continua en el intervalo $[-1, 2]$?	¿Es derivable en el intervalo (-1, 2)?
Sí es continua porque se puede dibujar sin levantar el lápiz.	**Sí** porque es continua y además no tiene esquinas ni saltos bruscos.

¿Se puede aplicar el Teorema del Valor Medio?

Sí porque cumple con ambos criterios.

Nota: Según Stewart (2021) y como se aprecia en las dos gráficas anteriores, las funciones polinomiales son continuas y derivables en todo el conjunto de los números reales.

Nota: Tabla de análisis de las condiciones para aplicar el Teorema del Valor Medio elaborada por Castillo Hdez., S. I. (2025) Docente del Plantel No. 6. Las gráficas fueron realizadas por la misma en GeoGebra.

<table>
<tr><th>Función escalonada</th><th>Función valor absoluto</th></tr>
<tr><td>Ejemplo específico:
$$f(x)\begin{cases}3 & \text{si} \quad -2 \le x < 2\\ 1 & \text{si} \quad 2 \le x < 4\\ -2 & \text{si} \quad 4 \le x < 6\end{cases}$$
Gráfica:
  </td><td>Ejemplo específico:
$$f(x) = |x - 2|$$
Gráfica:
  </td></tr>
<tr><td>¿Es continua en el intervalo $[-3, 6]$?
No es continua porque no se puede dibujar sin levantar el lápiz, ya que tiene saltos.</td><td>¿Es derivable en el intervalo (-3,6)?
No porque no es continua.</td><td>¿Es continua en el intervalo $[-4, 4]$?
Sí es continua porque sí se puede dibujar sin levantar el lápiz.</td><td>¿Es derivable en el intervalo (-4,4)?
No porque tiene una esquina en el punto (2,0).</td></tr>
<tr><td colspan="2">¿Se puede aplicar el Teorema del Valor Medio?
No, porque no es continua ni derivable.</td><td colspan="2">¿Se puede aplicar el Teorema del Valor Medio?
No, porque aunque es continua no es derivable.</td></tr>
</table>

Nota: Funciones como la **escalonada**, la **racional** con puntos no definidos o la **tangente** presentan discontinuidades dentro del intervalo cerrado [a, b], lo que impide cumplir la condición de continuidad. Otras funciones, como el **valor absoluto**, aunque sean continuas, no son derivables en ciertos puntos del intervalo abierto (a, b) debido a picos o vértices. En todos estos casos, cuando falla la continuidad o la derivabilidad dentro del intervalo, no es posible aplicar el Teorema del Valor Medio, tal como lo establece Stewart (2021).

Nota: Tabla de análisis de las condiciones para aplicar el Teorema del Valor Medio elaborada por Castillo Hdez., S. I. (2025) Docente del Plantel No. 6. Las gráficas fueron realizadas por la misma en GeoGebra.

Ejemplo 1

Sea la función:

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - x$$

1. Determine si cumple con las condiciones del Teorema del Valor Medio para *a = 2* y *b = 5.*
2. Después, calcule un valor *c* en el intervalo abierto (2,5) tal que:

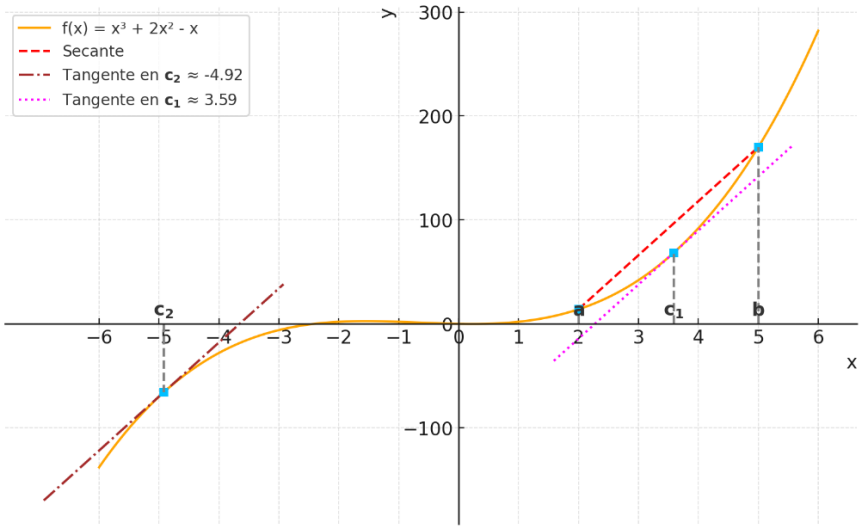
$$f'(c) = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2}$$

Descripción	Operaciones
Identifica la función dada.	$f(x) = x^3 + 2x^2 - x$
Verifica que cumple con las condiciones del Teorema del Valor Medio: debe ser continua y derivable.	Dado que es una función cúbica como la descrita en el cuadro anterior de "Análisis de gráficas" sí cumple con ambos criterios, ya que es continua porque se puede dibujar sin levantar el lápiz y es derivable porque además no tiene esquinas ni saltos bruscos.
Deriva la función para obtener $f'(x)$.	$f'(x) = \frac{d}{dy}x^3 + 2\frac{d}{dy}x^2 - \frac{d}{dy}x$ $f'(x) = 3x^{3-1} + 2 \cdot 2x^{2-1} - 1$ $f'(x) = 3x^2 + 4x - 1$

POR UNA EDUCACIÓN QUE GENERA CAMBIO

Evalúa la función en los extremos del intervalo.	$$f(a) = f(2) = (2)^3 + 2(2)^2 - (2)$$ $$f(2) = 8 + 8 - 2$$ $$f(2) = 14$$ $$f(b) = f(5) = (5)^3 + 2(5)^2 - (5)$$ $$f(5) = 125 + 50 - 5$$ $$f(5) = 170$$
Sustituye los valores de $f(a) = 14$ y $f(b) = 170$ en la expresión: $$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$	$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2}$$ $$= \frac{170 - 14}{5 - 2}$$ $$= \frac{156}{3}$$ $$=52$$
Iguala la derivada de la función al valor obtenido previamente, correspondiente a la pendiente de la secante entre los extremos del intervalo.	$$3x^2 + 4x - 1 = 52$$
Encuentra el valor de x. Existen varios métodos para resolver una ecuación cuadrática, pero en este caso se expresará en su forma general y se resolverá con la **fórmula general**.	$$3x^2 + 4x - 1 - 52 = 0$$ $$3x^2 + 4x - 53 = 0$$

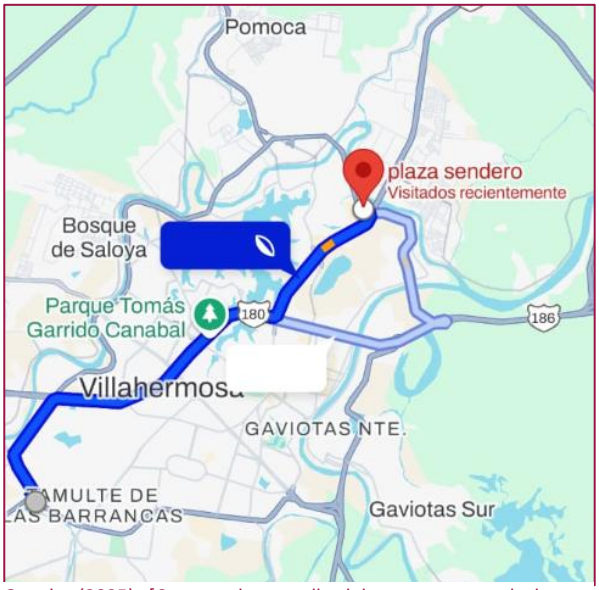
POR UNA EDUCACIÓN QUE GENERA CAMBIO

Aplica la fórmula general, dado que tenemos una ecuación de segundo grado, para encontrar los valores de *x* que satisfacen la ecuación; en este contexto, dichos valores corresponden a *c*. $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$\mathbf{3}x^2 + \mathbf{4}x - \mathbf{53} = 0$ Donde: **a=3**, **b=4** y **c=-53** *Sustituyendo:* $c = \frac{-(4) \pm \sqrt{(4)^2 - 4(3)(-53)}}{2(3)}$ $c = \frac{-4 \pm \sqrt{652}}{6}$ $c_1 = \frac{-4 + \sqrt{652}}{6}$ $c_2 = \frac{-4 - \sqrt{652}}{6}$
Obtén los valores aproximados de c.	$c_1 \approx 3.59$ $c_2 \approx -4.92$
Analiza los resultados: dado que el intervalo es [2, 5], observamos que $c_2 \approx -4.92$ no pertenece al intervalo, por lo tanto, solo se considera una solución válida	$\boldsymbol{c_1 \approx 3.59}$
En la siguiente imagen se visualiza de manera gráfica el resultado anterior. 	

Nota: Tabla de análisis de las condiciones para aplicar el Teorema del Valor Medio elaborada por Castillo Hdez., S. I. (2025) Docente del Plantel No. 6. La gráfica inserta fue realizada por la misma en GeoGebra.

Ejemplo 2

Un conductor fue detenido por un agente en el **Periférico Carlos Pellicer Cámara**, donde la velocidad máxima permitida, según la **Ley General de Tránsito y Vialidad del Estado de Tabasco**, es de **60 km/h**. Después de recibir una advertencia, recorrió **10 km en 9 minutos** (0.15 h) y se detuvo cerca de Plaza Sendero. Otro agente le impuso una infracción por exceso de velocidad. ¿Tenía razón?



Google. (2025). [Captura de pantalla del mapa mostrando la ruta Soriana San Joaquín a Plaza Sendero en Villahermosa, Tab.] [Imagen]. *Google Maps.* https://www.google.com/maps

Utilice el Teorema del Valor Medio para verificar que en realidad el conductor rebasó el límite de velocidad en algún punto. Sugerencia: suponga que la función de movimiento del conductor es $f(x)$ donde x representa al tiempo y que esta función se puede derivar.

Solución: Consideremos que la función $f(x)$ describe la distancia recorrida por el automóvil después de haber sido detenido inicialmente. La velocidad en un instante específico se representa con $f'(x) = v(x)$, que es la derivada de la distancia con respecto al tiempo. En este caso, se observa el comportamiento del vehículo durante un intervalo de 9 minutos (0.15 h) al inicio del intervalo, es decir, en $x = 0$, la distancia era de 0 km, y al final, en el tiempo $x = 0.15$ alcanzaba los 10 km.

Como la función $f(x)$ es continua y derivable en ese intervalo, se puede aplicar el Teorema del Valor Medio, el cual establece que debe existir al menos un momento ***c*** dentro del intervalo abierto (0, 0.15), en el que la velocidad instantánea del auto haya sido igual a su velocidad promedio durante ese tiempo.

Calculando dicha velocidad promedio:

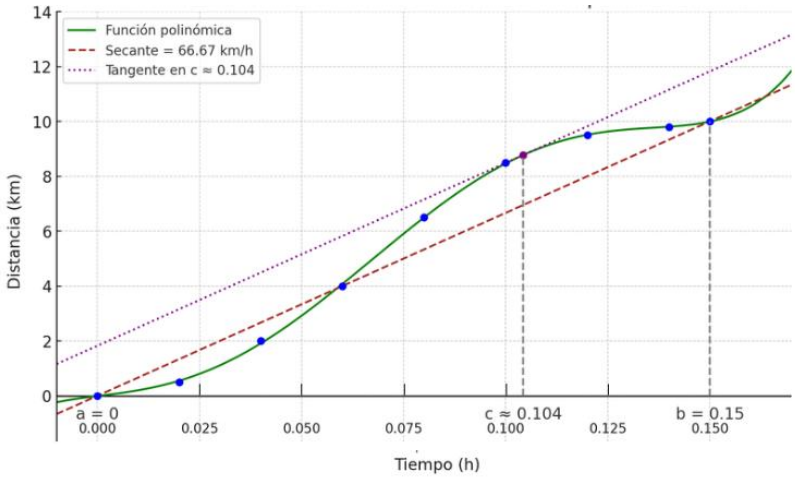
$$\boldsymbol{v(x) = \frac{f(0.15) - f(0)}{0.15 - 0} = \frac{10 - 0}{0.15 - 0} = \frac{10}{0.15} \approx 66.67\ km/h}$$

Por lo tanto:

$$\boldsymbol{f'(t) \approx 66.67\ km/h}$$

De acuerdo con el Teorema del Valor Medio $f'(x) = v(x) \approx 66.67\ km/h$ esto indica que, en algún instante, el vehículo circuló a aproximadamente $66.67\ km/h$, lo cual excede los límites permitidos en esa calle. Por consiguiente, la sanción por exceso de velocidad está justificada.

A continuación, en la gráfica se muestra la recta secante en color rojo, cuya pendiente representa la **velocidad promedio**. También se observa la recta tangente en color morado, cuya pendiente corresponde a la **velocidad instantánea** en un punto que coincide con dicha velocidad promedio. Cabe señalar que la línea verde es únicamente una suposición. Su forma puede variar, ya que no se proporciona la función exacta. Por ello, esta línea representa una de las posibles funciones que podrían cumplir con las condiciones establecidas



Castillo Hdez., S. I. (2025) Docente del Plantel No. 6 Gráfica de la distancia en función del tiempo recorrida por el conductor en Villahermosa [Imagen creada con GeoGebra].

Recurso audiovisual

Te invitamos a ver el siguiente video para repasar los conceptos abordados y reforzar tu comprensión del tema.

https://youtu.be/5UKFzLm0DjQ

POR UNA EDUCACIÓN QUE GENERA CAMBIO

Lectura: Teorema de Rolle

El Teorema de Rolle, atribuido al matemático francés Michel Rolle y publicado en 1691, establece que si una función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y diferenciable en el intervalo abierto (a, b), además que $f(a) = f(b)$, entonces existe al menos un valor c en el intervalo (a, b) para el que la derivada de f es igual a cero; es decir, $f'(c) = 0$.

A continuación, se enuncia formalmente el Teorema de Rolle.

Sea f una función que cumple lo siguiente:

1. Es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$
2. Es diferenciable en el intervalo abierto (a, b)
3. $f(a) = f(b)$

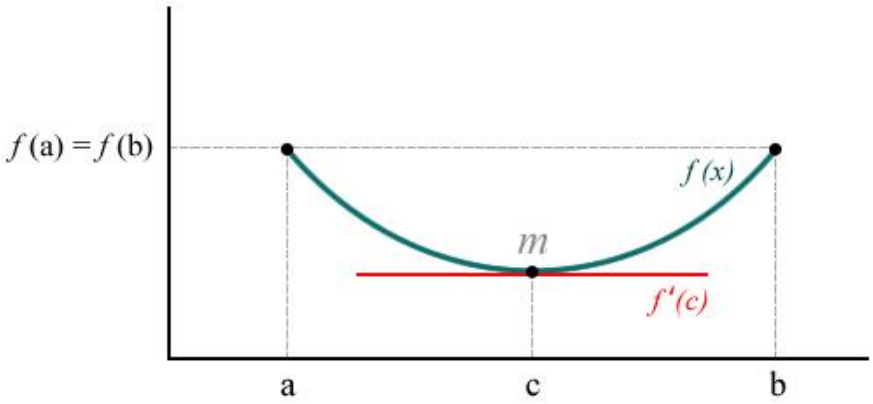
Entonces, existe al menos un valor c en el intervalo (a, b), tal que $f'(c) = 0$.

Interpretación geométrica del Teorema de Rolle

Si la gráfica de la función f es continua y suave (sin picos o esquinas) entre dos puntos que tengan la misma altura, $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ con $f(a) = f(b)$, entonces debe existir al menos un punto $(c, f(c))$ entre ellos donde la tangente a la gráfica de f es horizontal; es decir, la pendiente de la recta tangente en ese punto vale cero.

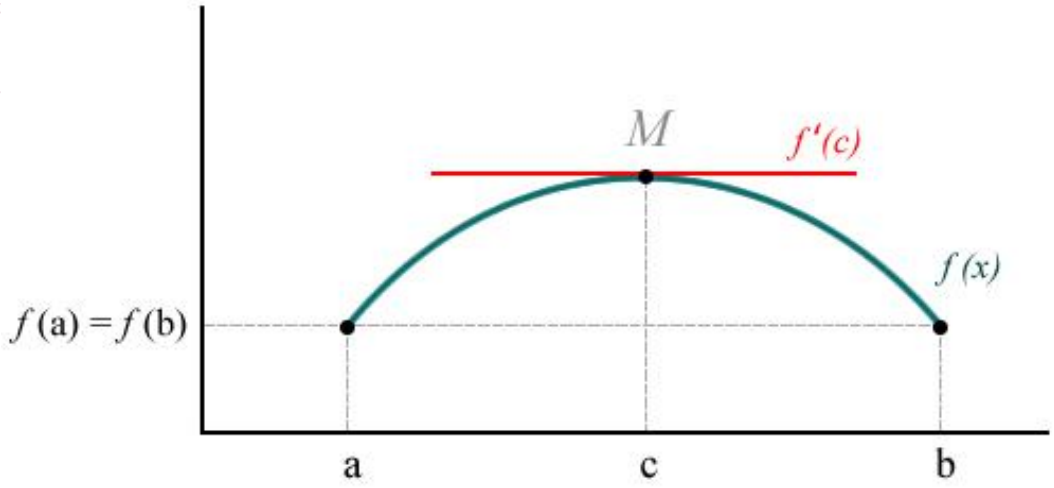
Las siguientes imágenes son ejemplos en los que se cumplen las condiciones del Teorema de Rolle.

Ejemplo 1. La función *f* tiene un punto mínimo.



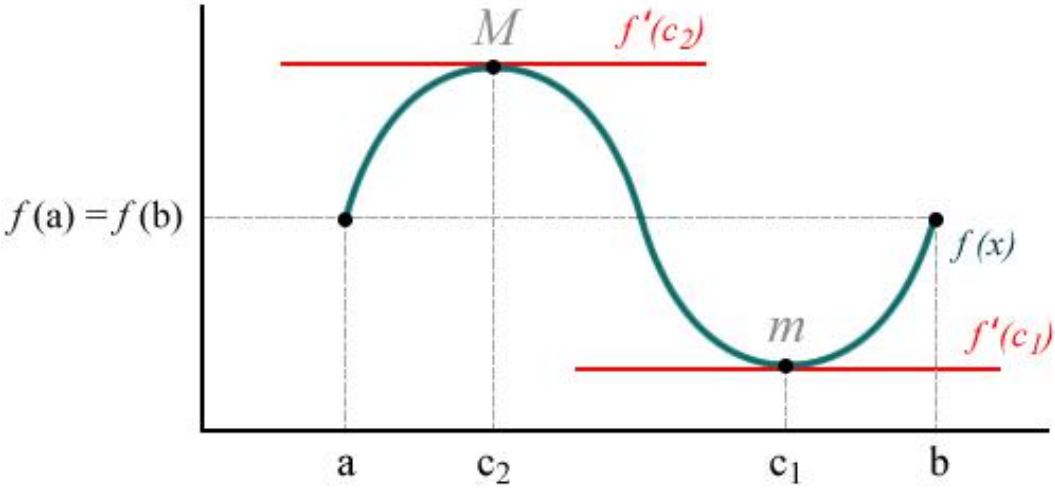
Recuperado de https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Teorema_de_Rolle_(caso_1).jpg (junio, 2025).

Ejemplo 2. La función *f* tiene un punto máximo.



Recuperado de https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Teorema_de_Rolle_(caso_2).jpg (junio, 2025).

Ejemplo 3. La función *f* tiene un punto mínimo y un punto máximo.



Recuperado de https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Teorema_de_Rolle_(caso_3).jpg (junio, 2025).

Importancia y aplicaciones del Teorema de Rolle

- Es un caso especial del Teorema del Valor Medio.
- Se emplea para demostrar otros teoremas en el área del análisis matemático.
- Garantiza la existencia de puntos críticos (puntos donde la derivada de la función f vale cero), lo cual es de mucha utilidad en problemas de optimización.

Ejemplo 1

Compruebe que la función

$f(x) = x^2 - 4x + 5$

cumpla las condiciones del Teorema de Rolle para el intervalo $[0, 4]$ y determine el valor de c para el cual $f'(c) = 0$.

Solución.

1. **Continuidad.** Como f es una función polinomial, entonces es *continua* en todo el conjunto de los números reales, incluyendo el intervalo cerrado $[0, 4]$.
2. **Diferenciabilidad.** Como f es una función polinomial, entonces es *diferenciable* en todo el conjunto de los números reales, incluyendo el intervalo abierto $(0, 4)$. Además, su derivada es $f'(x) = 2x - 4$.
3. **Igualdad en los extremos.**

Dado que $f(x) = x^2 - 4x + 5$ Para $a = 0$ $f(0) = (0)^2 - 4(0) + 5$ $f(0) = 0 - 0 + 5$ $f(0) = 5$	Dado que $f(x) = x^2 - 4x + 5$ Para $b = 4$ $f(4) = (4)^2 - 4(4) + 5$ $f(4) = 16 - 16 + 5$ $f(4) = 5$

Como $f(0) = f(4)$, entonces se cumplen las condiciones del Teorema de Rolle.

Para determinar el valor de c, resolvemos la ecuación $f'(c) = 0$

$2c - 4 = 0$

$2c = 4$

$c = \frac{4}{2}$

$c = 2$

Por lo tanto, $c = 2$, que pertenece al intervalo $(0, 4)$, es el valor para el cual la derivada de la función f es igual a cero.

Comprobación de que para $c = 2$, la derivada de f es igual a cero.

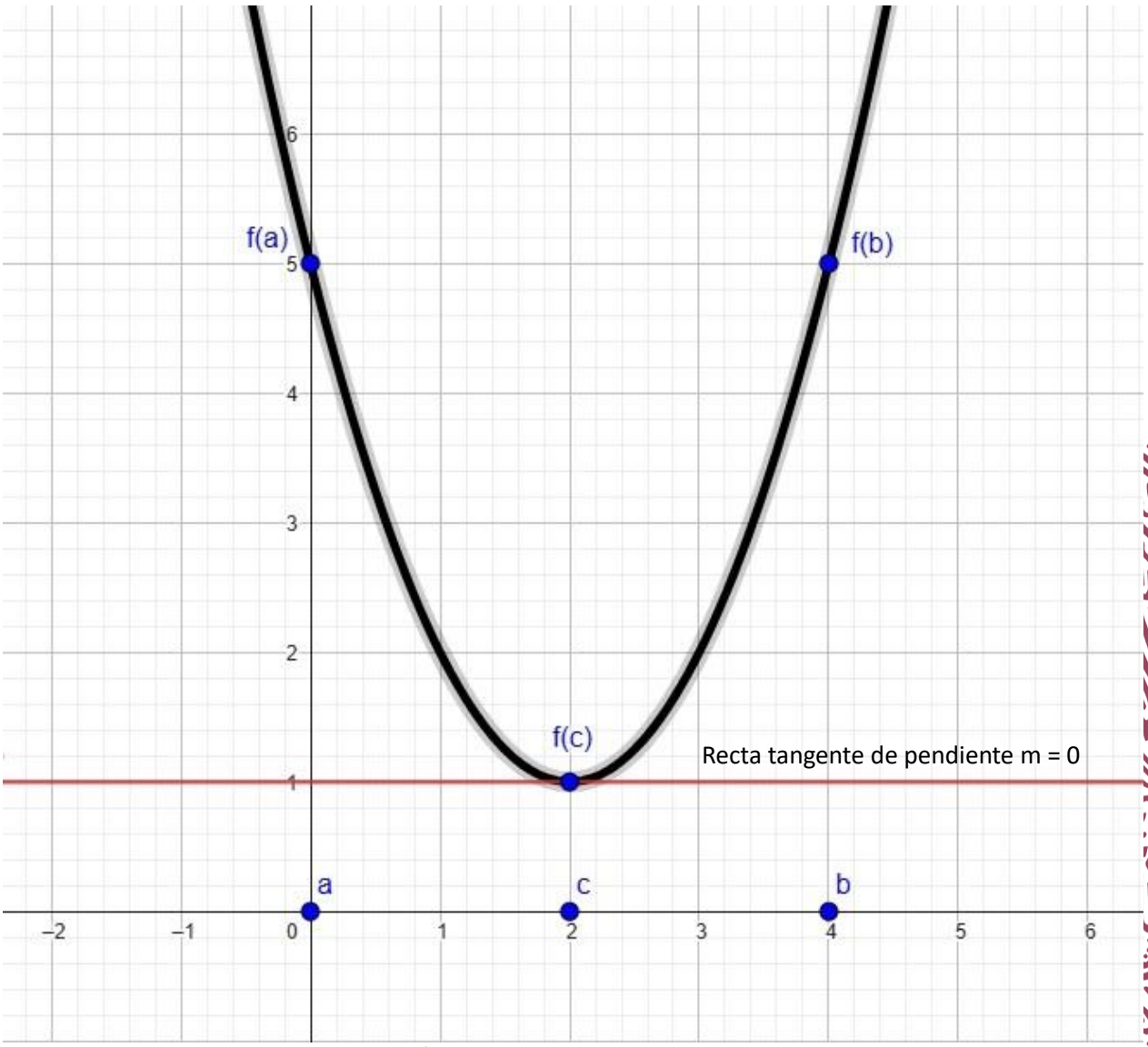
Como $f'(x) = 2x - 4$, entonces para $c = 2$ se tiene que

$f'(2) = 2(2) - 4$

$f'(2) = 4 - 4$

$f'(2) = 0$

En la siguiente figura se muestra que la función f cumple las condiciones del Teorema de Rolle para el intervalo $[0, 4]$. Además, para el valor $c = 2$, la recta tangente a la gráfica de f es horizontal; es decir, tiene pendiente igual a cero.



Elaborado en www.geogebra.org/calculator por el M.C Mario A. Vidal, Docente del Plantel No. 3 (junio, 2025).

Ejemplo 2

Verifique que la función

$f(x) = x^3 - 9x$

cumpla las condiciones del Teorema de Rolle en el intervalo $[-3, 3]$ y obtenga los valores de c para los cuales $f'(c) = 0$.

Solución.

1. **Continuidad.** Como f es una función polinomial, entonces es *continua* en todo el conjunto de los números reales, incluyendo el intervalo cerrado $[-3, 3]$.
2. **Diferenciabilidad.** Como f es una función polinomial, entonces es *diferenciable* en todo el conjunto de los números reales, incluyendo el intervalo abierto $(-3, 3)$. Además, su derivada es $f'(x) = 3x^2 - 9$.
3. **Igualdad en los extremos.**

Dado que $f(x) = x^3 - 9x$	Dado que $f(x) = x^3 - 9x$
Para $a = -3$	Para $b = 3$
$f(-3) = (-3)^3 - 9(-3)$	$f(3) = (3)^3 - 9(3)$
$f(-3) = -27 + 27$	$f(3) = 27 - 27$
$f(-3) = 0$	$f(3) = 0$

Como $f(-3) = f(3)$, entonces se cumplen las condiciones del Teorema de Rolle.

Para obtener los valores de c, resolvemos la ecuación $f'(c) = 0$

$3c^2 - 9 = 0$

$3c^2 = 9$

$c^2 = \frac{9}{3}$

$c^2 = 3$

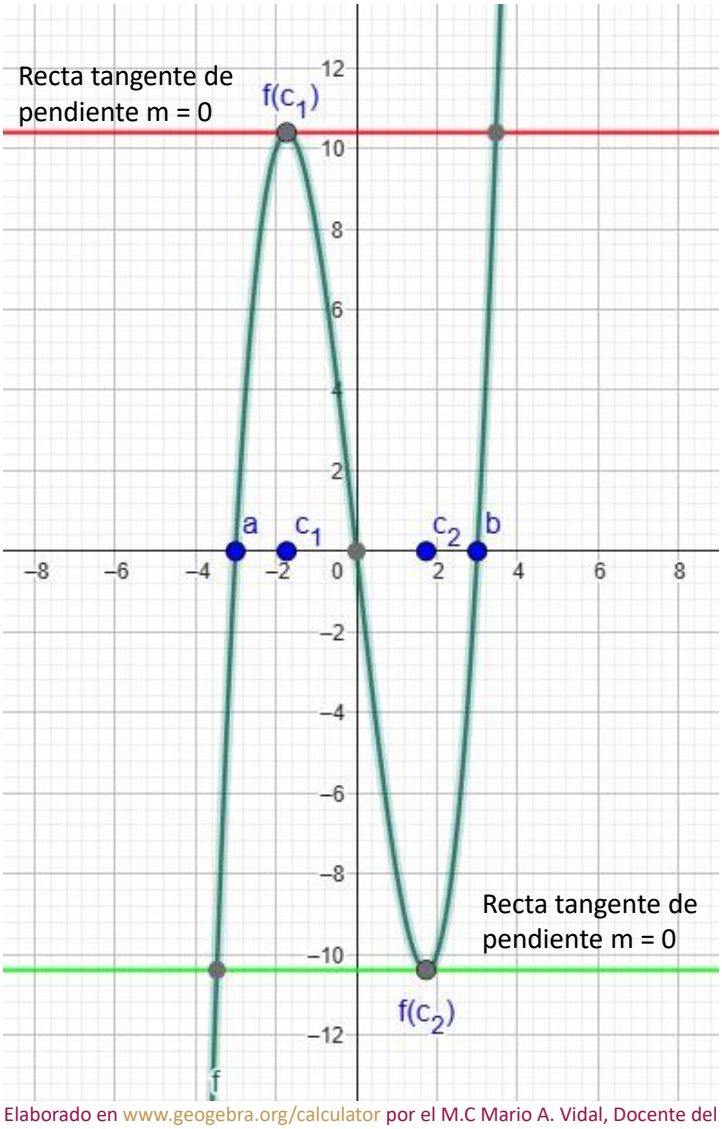
$c = \pm\sqrt{3}$

Por lo tanto, $c_1 = -\sqrt{3}$ y $c_2 = \sqrt{3}$, que pertenecen al intervalo $(-3, 3)$, son los valores para los cuales la derivada de la función f es igual a cero.

Comprobación de que para $c_1 = -\sqrt{3}$ y $c_2 = \sqrt{3}$, la derivada de f es igual a cero.

Dado que $f'(x) = 3x^2 - 9$	Dado que $f'(x) = 3x^2 - 9$
Para $c_1 = -\sqrt{3}$	Para $c_2 = \sqrt{3}$
$f'(-\sqrt{3}) = 3(-\sqrt{3})^2 - 9$	$f'(\sqrt{3}) = 3(\sqrt{3})^2 - 9$
$f'(-\sqrt{3}) = 9 - 9$	$f'(\sqrt{3}) = 9 - 9$
$f'(-\sqrt{3}) = 0$	$f'(\sqrt{3}) = 0$

En la siguiente figura se muestra que la función f cumple las condiciones del Teorema de Rolle para el intervalo $[-3, 3]$. Además, para los valores $c_1 = \sqrt{3}$ y $c_2 = -\sqrt{3}$, las rectas tangentes a la gráfica de f son horizontales; es decir, tienen pendiente igual a cero.



Elaborado en www.geogebra.org/calculator por el M.C Mario A. Vidal, Docente del Plantel No. 3 (junio, 2025).

Ejemplo de aplicación en una situación real

Un grupo de estudiantes de COBATAB están poniendo en práctica lo aprendido en clase sobre tiro vertical, por lo que deciden lanzar una piedra verticalmente hacia arriba desde el suelo, $h_0 = 0$, con una velocidad inicial $v_0 = 24.5\ m/s$. Aplicando la fórmula del tiro vertical para calcular la altura de un objeto en función del tiempo, obtienen la expresión $h(t) = 24.5t - 4.9t^2$.

a) Calcule el tiempo T que tarda la piedra en el aire; es decir, el tiempo que tarda en golpear el suelo.

b) Determine para que tiempo t la piedra tiene una velocidad igual a cero; es decir, $h'(t) = 0$. En otras palabras, alcanza su altura máxima.

Solución

Calculamos el tiempo T que tarda la piedra en el aire. Para ello, resolvemos la ecuación $h(T) = 0$

$24.5T - 4.9T^2 = 0$

$T(24.5 - 4.9T) = 0$

La ecuación anterior tiene dos soluciones

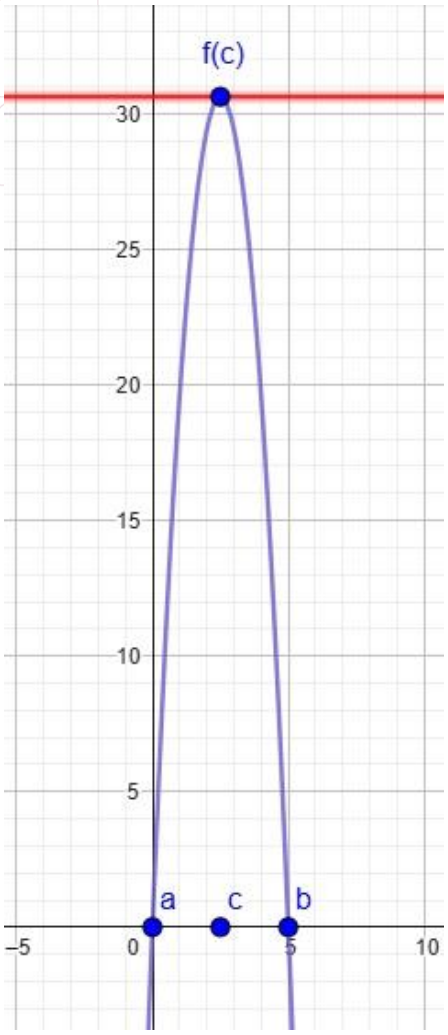
Solución 1	Solución 2
$T = 0$ $T_1 = 0$	$24.5 - 4.9T = 0$ $4.9T = 24.5$ $T = \frac{24.5}{4.9}$ $T_2 = 5$

Por lo tanto, la piedra tarda $T = 5$ segundos en el aire.

De lo anterior se tiene que para el intervalo cerrado $[0, 5]$, la altura inicial y la altura final de la piedra son iguales; es decir, $h(0) = h(5) = 0$.

Además, como la función $h(t) = 24.5t - 4.9t^2$ es del tipo polinomial, entonces es continua en el intervalo cerrado $[0, 5]$ y diferenciable en el intervalo abierto $(0, 5)$.

De esta forma, como la función $h(t)$ cumple las tres condiciones del Teorema de Rolle, entonces debe existir al menos un valor t en el intervalo $(0, 5)$ para el que la velocidad de la piedra es igual a cero; es decir, $h'(t) = 0$.



Elaborado en www.geogebra.org/calculator por el M.C Mario A. Vidal, docente del plantel 3 (junio, 2025)

Ahora, determinamos el tiempo t para el que la velocidad de la piedra es igual a cero. Para esto, obtenemos la derivada de la función $h(t) = 24.5t - 4.9t^2$, la cual es

$$h'(t) = 24.5 - 9.8t$$

Igualando $h'(t) = 0$ se tiene que

$$24.5 - 9.8t = 0$$

$$9.8t = 24.5$$

$$t = \frac{24.5}{9.8}$$

$$t = 2.5$$

Por lo tanto, $t = 2.5$ segundos es el tiempo en que la piedra tiene una velocidad igual a cero; es decir, $h'(2.5) = 0$.

$$h'(2.5) = 24.5 - 9.8(2.5)$$

$$h'(2.5) = 24.5 - 24.5$$

$$h'(2.5) = 0$$

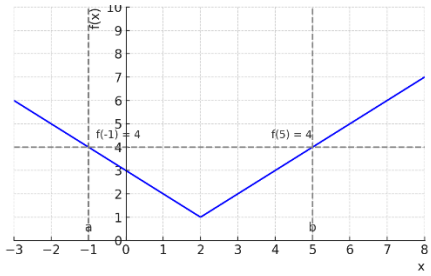
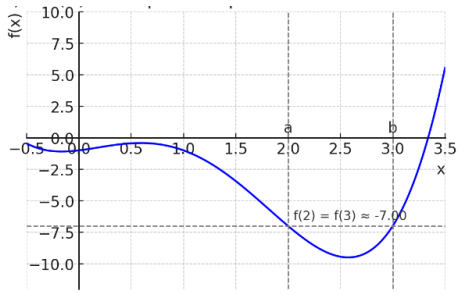
Recurso audiovisual

Te invitamos a ver el siguiente video para repasar lo abordado sobre el Teorema de Rolle y reforzar tu comprensión del tema.

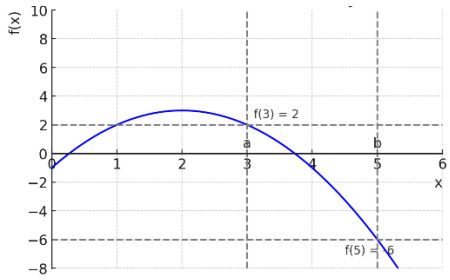
https://www.youtube.com/watch?v=5iawHvi-RQk

TPV1-SA2-ACT01 Matriz de clasificación

Teorema del Valor Medio y Teorema de Rolle

Gráfica	¿Es continua?	¿Es derivable?	¿Son iguales f(a) y f(b)?	¿Se puede aplicar el Teorema del Valor Medio?	¿Se puede aplicar el Teorema de Rolle	Conclusión
$f(x) = [x - 2] + 1$ **Intervalo:** $[-1, 5]$ 						
$f(x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 + x - 1$ **Intervalo:** $[2, 3]$ 						

POR UNA EDUCACIÓN QUE GENERA CAMBIO

Gráfica	¿Es continua?	¿Es derivable?	¿Son iguales f(a) y f(b)?	¿Se puede aplicar el Teorema del Valor Medio?	¿Se puede aplicar el Teorema de Rolle	Conclusión
$f(x) - x^2 + 4x - 1$ **Intervalo:** $[3, 5]$  						

Problemario TPV1-SA2-ACT02

Teorema del Valor Medio

Instrucciones: Resuelve los siguientes ejercicios. Asegúrate de mostrar tus procedimientos y revisar tus respuestas antes de entregar.

1. Analiza si se cumplen las condiciones del Teorema del Valor Medio para cada una de las siguientes funciones dentro del intervalo indicado y determina el valor de c que satisface dicho teorema:

a) $f(x) = 9x^2 + 8x + 3$ $[2, 8]$

b) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x$ $[-1, 3]$

c) $f(x) = 3x^3 + 4x^2 + 3x - 2$ $[-5, 3]$

d) $f(x) = 8x^3 - 6x^2 + 8x - 5$ $[-2, 4]$

2. Una van de transporte público salió de Villahermosa con destino a Ciudad del Carmen y fue advertido pasando Ocuiltzapotlán donde el límite de velocidad permitida es de 120 km/h. Posteriormente recorrió 65 km en 27 minutos (0.45 h) y se estacionó después de Frontera, donde otro agente lo sancionó por exceso de velocidad. ¿Crees que la sanción fue justa? Justifica con el Teorema del Valor Medio.

POR UNA EDUCACIÓN QUE GENERA CAMBIO

Teorema de Rolle

Instrucciones: Resuelve los siguientes ejercicios. Asegúrate de anotar tus procedimientos y revisar tus respuestas antes de entregar.

1. Verificar que las condiciones del Teorema de Rolle se cumplan para las siguientes funciones en el intervalo indicado. Además, de ser posible, obtener los valores de c para los que $f'(c) = 0$.

   $a. f(x) = x^2 + 6x + 5$ en el intervalo $[-7, 1]$

   b. $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ en el intervalo $[-1, 2]$

   c. $f(x) = \operatorname{sen} x$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$

   d. $f(x) = e^x \operatorname{sen} x$ en el intervalo $[0, \pi]$

   e. $f(x) = x \ln x$ en el intervalo $[0, 1]$

2. Los alumnos de la capacitación de robótica del Plantel 5 están probando un dron cuya trayectoria está dada por la función de posición $f(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 4t$, donde la variable t es el tiempo en el aire en segundos. Calcule que tiempo le tomará al dron alcanzar su altura máxima antes de volver a tocar tierra.

3. Redacta una reflexión acerca de la utilidad de ambos teoremas en fenómenos reales.

La respuesta puede variar

POR UNA EDUCACIÓN QUE GENERA CAMBIO

Progresión 6

Aplica procedimientos algorítmicos para derivar funciones implícitas y de orden superior, así como el uso de estas últimas para resolver límites indeterminados utilizando la regla de L'Hopital aplicando estas herramientas en la solución de problemas de las ciencias

Metas de Aprendizaje	Categorías	Subcategorías
C1M1. Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de la ciencia y de su entorno.	**C1.** Procedural	**S1.** Elementos aritméticos-algebraicos.
C1M2. Analiza los resultados obtenidos al aplicar procedimientos algorítmicos propios del pensamiento matemático en la resolución de problemáticas teóricas y de su contexto.		**S3.** Elementos variacionales
C3M1. Selecciona un modelo matemático por la pertinencia de sus variables y relaciones para explicar una situación, fenómeno o resolver un problema tanto teórico como de su contexto.	**C3.** Solución de problemas y modelación	**S2.** Construcción de modelos
C3M3. Aplica procedimientos, técnicas y lenguaje matemático para la solución de problemas propios del pensamiento matemático, de áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno.		

Lectura: Derivación implícita

Concepto clave

La mayoría de las funciones que has utilizado hasta ahora, se han descrito como una variable explícitamente en términos de otra variable, propiamente en función de la variable independiente "x". De igual forma, la derivación sigue mismo camino, todos los métodos vistos se han realizado de forma **explícita**, es decir el segundo miembro solo contiene valores de "x", sin embargo, existen otras funciones que se definen por la relación "x" y "y", de la forma $f(x,y)=0$, se dice que "y" es una función **implícita** de "x". Algunos ejemplos se muestran en la siguiente tabla:

Formas de expresar la función	
Función explícita	**Función implícita**
Ejemplos: $y = 2x\cos x$ $f(x) = 5x^3 - 3x^4 + x^2 - 1$ $g(x) = \frac{x+2}{x-1}$	Ejemplos: $x^3y + xy^3 - 5 = 0$ $xy = \cos(x+y)$ $\frac{3}{x} - \frac{6}{y} = 2y + 8x$
Nota: todos los términos de **x** se encuentran en un solo miembro de la igualdad.	***Nota:*** tratar de despejar $\boldsymbol{y = f(x)}$, es más complicado, a veces no es posible hacerlo.

Observamos que sería más complicado realizar un despeje de "y" para realizar la derivada, en este caso, es mejor recurrir a la **Derivación Implícita**, derivando con respecto a "x", pero teniendo en cuenta que "y" es función de "x", agrupando los términos que contengan a $f'(x)=\frac{dy}{dx}$, finalizando con su despeje.

Regla de la cadena

Al encontrarnos funciones más complejas comúnmente en el área de las matemáticas, modelos de física, química o medicina, existen funciones que se combinan con otras funciones. Nos apoyaremos con la regla de la cadena para derivar funciones implícitas.

Si g es derivable en x y f es derivable en $g(x)$, entonces la función compuesta definida por $f'(g(x))\cdot g'(x)$ es derivable en x, es decir:

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = f'(g(x))\cdot g'(x)}$$

POR UNA EDUCACIÓN QUE GENERA CAMBIO

En la notación de Leibniz, sí y es función de u, u es función de x:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dy}$$

Ejemplo 1

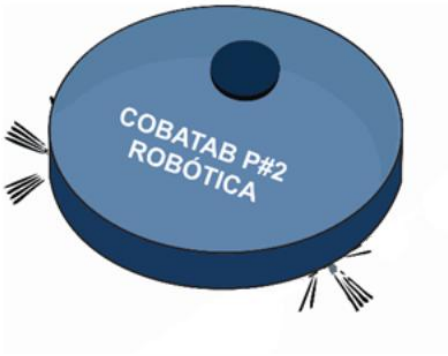
Pasos para resolver la derivada implícita:

Regla de la cadena en la derivación implícita	
Función implícita	$y^3 = 3x + 4y^2$ Primer miembro hay términos de "y" = Segundo miembro hay términos de "y"
1.Derivamos todas las variables para ambos miembros de la igualdad con respecto a x.	$\frac{d}{dx}y^3 = \frac{d}{dx}3x + \frac{d}{dx}4y^2$
2.Para los términos de x, es sencillo derivar como se ha realizado hasta ahora.	$\frac{d}{dx}3x = 3$
3.Para los términos de y, como suponemos que y es una función de x, debemos multiplicar también su derivada $\frac{dy}{dx}$ tal como lo indica la regla de la cadena.	$\frac{d}{dx}(y^3) = 3y^{3-1}\frac{d}{dx}y = 3y^2\frac{d}{dx}y$ $\frac{d}{dx}(4y^2) = 8y^{2-1}\frac{d}{dx}y = 8y\frac{d}{dx}y$ Entonces: $3y^2\frac{dy}{dx} = 3 + 8y\frac{dy}{dx}$
4.Despues de derivar, factorizamos y realizamos el despeje para $\frac{dy}{dx}$	Ordenando los términos: $3y^2\frac{dy}{dx} - 8y\frac{dy}{dx} = 3$ Factorizando: $(3y^2 - 8y)\frac{dy}{dx} = 3$ Despejando: $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{3y^2 - 8y}$

POR UNA EDUCACIÓN QUE GENERA CAMBIO

Ejemplo 2

Los estudiantes de la capacitación de robótica de 6to semestre del plantel No.2, diseñaron una aspiradora robot, cuya trayectoria se modela con la ecuación de una circunferencia: $x^2 + y^2 = 16$, a partir de esta expresión, obtén la derivada implícita $\frac{dy}{dx}$.



"Aspiradora Robot". Imagen realizada en CorelDRAW-2021, por Luis Miguel Ruiz Rodríguez, docente del plantel 2 (Julio 2025).

Tomemos la expresión de la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$, despejar la variable "y" en función de "x", podría resultar en una expresión más difícil de derivar:

$y^2 = 16 - x^2$, despejando: $y = \pm\sqrt{16 - x^2}$

Derivación explícita	Derivación implícita
$\boldsymbol{y_1 = \sqrt{16 - x^2};\ y_2 = -\sqrt{16 - x^2}}$ Derivamos solo a y_1, la derivada de y_2 será el mismo resultado con signo contrario. $\frac{dy_1}{dx} = \frac{d}{dx}\sqrt{16 - x^2} = \frac{d}{dx}(16 - x^2)^{1/2}$ $\frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{2}(16 - x^2)^{\frac{1}{2}-1}\frac{d}{dx}(16 - x^2)$ $\frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{2}(16 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)$ Reordenando la expresión: $\frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{2(16 - x^2)^{\frac{1}{2}}}(-2x)$ Simplificando: $\frac{dy_1}{dx} = \frac{-2x}{2(16 - x^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{x}{\sqrt{16 - x^2}}$ $\frac{dy_2}{dx} = \frac{x}{\sqrt{16 - x^2}};\ \boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \pm\frac{x}{\sqrt{16 - x^2}}}$	$\boldsymbol{x^2 + y^2 = 16}$ $\frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}y^2 = \frac{d}{dx}16$ $2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$ Despejando: $\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}}$ Podemos obtener la pendiente con cualquier punto de la circunferencia (x, y). De igual forma se puede expresar el resultado en términos de la variable x, sustituyendo a $y = \pm\sqrt{16 - x^2}$: $\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \pm\frac{x}{\sqrt{16 - x^2}}}$

Nota: Observamos que era más conveniente usar la derivación implícita, reduciéndose el número de pasos y evitando la simplificación algebraica del resultado.

Ejemplo 3

Obtener $\frac{dy}{dx}$, si $\boldsymbol{y = \cos(4xy)}$. Aplicamos la derivada en cada miembro de la igualdad:

$$\frac{d}{dx}(y) = \frac{d}{dx}\cos(4xy)$$

De la regla de la cadena y la regla del producto$\left(\frac{d}{dx}uv = u\frac{d}{dx}v + v\frac{d}{dx}u\right)$, se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = -sen(4xy)\cdot 4\frac{d}{dx}(xy) = -sen(4xy)\cdot 4\left(x\frac{d}{dx}y + y\frac{d}{dx}x\right)$$

Multiplicamos los términos obtenidos de la derivada:

$$\frac{dy}{dx} = -sen(4xy) + 4x\frac{dy}{dx} + 4y$$

Ordenamos términos de $\frac{dy}{dx}$ en el primer miembro:

$$\frac{dy}{dx} - 4x\frac{dy}{dx} = -sen(4xy) + 4y$$

Factorizando:

$$\frac{dy}{dx}(1 - 4x) = -sen(4xy) + 4y$$

Finalmente despejamos $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-sen(4xy) + 4y}{1 - 4x} = \frac{4y - sen(4xy)}{1 - 4x}$$

Recurso audiovisual.

Para saber más sobre la derivación implícita puedes observar el siguiente video escaneando el código QR:

https://www.youtube.com/watch?v=xuw3lbkEJ0o

Problemario

1.Instrucciones: Realizar la Derivación implícita de las siguientes funciones.

a) $2x^2 - 8x + 4y^5 = 3x - y$

b) $x = sen(x + 6y)$

c) $5x^2 + xy^4 = -2x^2 + 3y$

2.En Electrónica, existe un dispositivo llamado "Amplificador Operacional Derivador", cuya función es producir un voltaje de salida (V_o) proporcional a la variación instantánea del voltaje de entrada (V_i) con respecto al tiempo (t), R y C son la resistencia y capacitancia del circuito respectivamente, su ecuación se muestra a continuación:

$$V_o = -RC\frac{dV_i}{dt}$$

Enfocándonos únicamente en la derivación, obtener $\frac{dV_i}{dt}$, para una señal igual a: $V_i = \mathbf{sen}(V_i + 2t)$

3.El área total de la superficie de un cilindro circular recto de altura "h" y radio "r", se represente a partir de la ecuación: $2\pi r^2 + 2\pi rh = 50$, hallar $\frac{dr}{dh}$.

POR UNA EDUCACIÓN QUE GENERA CAMBIO

Lectura: Derivas de orden superior.

Antecedentes

Las derivadas de orden superior son un concepto fundamental en el cálculo diferencial que se utiliza para analizar el comportamiento de funciones en diferentes niveles de profundidad. En este tema, exploraremos cómo se desarrollaron las derivadas de orden superior y su importancia en la matemática y la física.

El concepto de derivada se remonta a la antigüedad, con contribuciones de matemáticos como Arquímedes y Pierre Fermat. Sin embargo, el desarrollo de las derivadas de orden superior se aceleró en el siglo XVII con el trabajo de:

Isaac Newton: Newton desarrolló el método de las fluxiones, que es equivalente a la derivada. Utilizó derivadas de orden superior para estudiar la física de los objetos en movimiento.

Tomado de Isaac Newton [Imagen] *Store norske leksikon*. (s.f.), https://acortar.link/9AYwFG

Gottfried Wilhelm Leibniz: Leibniz introdujo la notación de $\frac{dy}{dx}$ para la derivada y también trabajó con derivadas de orden superior.

Tomado de Gottfried Wilhelm Leibniz [Imagen] *Store norske leksikon*. (s.f.), https://acortar.link/KpQfhH

Definición y notación

Una derivada de orden superior es la derivada de una función que ha sido derivada una o más veces. Es decir, si *f(x)* es una función derivable entonces su derivada *f'(x)* también es una función, derivando la primera derivada se obtiene otra función, llamada segunda derivada, la cual se denota por *f''(x),* obteniendo una función nueva.

Suponiendo que todas las derivadas existen, puede diferenciarse una función $y = f(x)$ tantas veces como se quiera. La tercera derivada es la derivada de la segunda derivada. La cuarta derivada es la derivada de la tercera derivada, y así sucesivamente.

Para denotar las derivadas de orden superior se tiene que:

- La derivada de una función se llama primera derivada y se denota con: $y' = \frac{dy}{dx}$.
- La derivada de la derivada se llama segunda derivada y se denota con: $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$
- La derivada de la segunda derivada se llama tercera derivada y se denota con: $y''' = \frac{d^3y}{dx^3}$
- Así sucesivamente hasta llegar a la enésima derivada, es decir: $y^n = \frac{d^ny}{dx^n}$

Ejemplos

obtener la $\frac{d^3y}{dx^3}$ si $y = 4x^2 - 6x + 2$.

Para resolver esta derivada es necesario recurrir a las derivadas de orden superior, ya que $\frac{d^3y}{dx^3}$ nos esta indicando que se quiere saber cual es el resultado de la tercera derivada, por lo tanto:

Ejemplo 1	
Función	**Obtener la $\frac{d^3y}{dx^3}$ derivada**
$y = 4x^2 - 6x + 2$	$y' = \frac{d}{dx}(4x^2 - 6x + 2) = 8x - 6$ $y'' = \frac{d^2}{dx^2}(8x - 6) = 8$ $y''' = \frac{d^3}{dx^3}(8) = 0$ Por lo tanto, el resultado de la tercera derivada es cero.

Ejemplo 2	
Función	**Calcular $\frac{d^2y}{dx^2}$ derivada**
$y = cos^3\ x$	$y' = \frac{d}{dx}(cos^3\ x) = -3cos^2 x\ sen\ x$ $y'' = \frac{d^2}{dx^2}(-3cos^2 x\ sen\ x)$ $= -3cos^2 x \frac{d}{dx}(sen\ x) + sen\ x \frac{d}{dx}(-3cos^2 x)$ $= -3cos^2 \cos x - 6sen\ x \cos x\ (-sen\ x)$ $= -3cos^3 x + 6sen^2 x \cos x$ Por lo tanto, el resultado de la segunda derivada es $y'' = -3cos^3 x + 6sen^2 x \cos x$.

Ejemplo 3. En el Colegio de Bachilleres de Tabasco los alumnos de la serie físico- matemático, realizaron un experimento de un proyectil el cual sigue una trayectoria dada por la función $\boldsymbol{f(t) = -16t^2 + 100}$, donde t es el tiempo en segundos. Ellos desean calcular la aceleración y la velocidad del proyectil en $t = 2s$.

Función	Solución.
$\boldsymbol{f(t) = -16t^2 + 100}$	Para calcular la velocidad del proyectil, se calcula la primera derivada. $\boldsymbol{v(t) = f'(t) = -32t}$ Para calcular la aceleración, se calcula la derivada de la velocidad, es decir; la segunda derivada de $f(t)$. $\boldsymbol{a(t) = v'(t) = f''(t) = -32}$ Como nos piden la aceleración y velocidad en $t = 2$, entonces sustituyendo tenemos que: $\boldsymbol{a(2) = -32}$ Su aceleración será de $-32\ m/s^2$, como es negativa decimos que está desacelerando. La velocidad sería $\boldsymbol{v(2) = -32(2) = -64\ m/s}$ Observamos que la velocidad es negativa, significa que está disminuyendo la velocidad, en otras palabras, el proyectil está frenando.

Recurso audiovisual

Para saber más sobre las derivadas de orden superior, puedes observar el siguiente video dando clic en el enlace o escanea el código QR:

https://www.youtube.com/watch?v=wvgbIdMrRP0

Lectura: Regla de L' Hopital

La regla de L'Hôpital es una herramienta fundamental en el cálculo diferencial que se utiliza para evaluar límites de funciones que presentan indeterminaciones. Esta regla lleva el nombre del matemático francés Guillaume François Antoine, Marqués de L'Hôpital, quien la popularizó en su libro "Analyse des Infiniment Petits pour l'Intelligence des Lignes Courbes" en 1696.

La regla de L'Hopital señala que el límite de un cociente de funciones es igual al límite del cociente de sus derivadas, siempre que se cumplan con las condiciones dadas. Es decir; sea *f* y *g* dos funciones derivables y $g'(x) \neq 0$ sobre un intervalo *I* que contiene *a*. Suponga que:

$\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, o que $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$

En otras palabras, tenemos una forma indeterminada de tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$. Entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Ejemplos

Para poder comprender la regla de L'Hopital analicemos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1		
Límite	Análisis	Aplicación
Obtener el $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$	Primero evaluamos en el límite directamente para ver qué resultados nos da; es decir: $\lim_{x\to 3}\frac{3^2-9}{3-3}=\frac{9-9}{3-3}=\frac{0}{0}$ Obtuvimos como resultado $\frac{0}{0}$ es una forma indeterminada, por lo tanto, podemos aplicar la regla de L'Hopital.	La regla de L'Hopital nos dice que derivemos tanto el numerador como el denominador, es decir: $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\frac{d}{dx}(x^2-3)}{\frac{d}{dx}(x-3)}$ $=\lim_{x\to 3}\frac{2x}{1}$ Una vez derivado, se sustituye el límite. $\lim_{x\to 3}\frac{2x}{1}=\frac{2(3)}{1}=\frac{6}{1}=6$ Por lo tanto, el límite es 6.
Ejemplo 2		
Límite	**Análisis**	**Aplicación**
Calcular el $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$	Primero sustituimos directamente en el límite para ver si se trata de una indeterminación: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 0}{0}=\frac{0}{0}$, por lo tanto, se trata de una indeterminación, para resolver esta cuestión aplicaremos la regla de L' Hopital.	Derivando el numerador y el denominador: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{\frac{d}{dx}(\sin x)}{\frac{d}{dx}(x)}$ $=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}$ Ahora sustituimos el límite en $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\frac{\cos 1}{1}=\frac{1}{1}=1$ Por lo tanto, el $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$

POR UNA EDUCACIÓN QUE GENERA CAMBIO

Ejemplo 3		
Límite	**Análisis**	**Aplicación**
Calcular $\lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{2x+3}$	Evaluemos directamente el valor de x en el límite, y observemos si hay una indeterminación. $\lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{2x+3} = \frac{\infty-1}{2(\infty)+3} = \frac{\infty}{\infty}$, ya que, si a un número grande le quitamos uno, sigue siendo infinito, por otro lado, si a un número infinito se multiplica por dos y le sumamos tres, sigue siendo infinito. Por lo tanto, si hay una indeterminación.	Aplicando la regla de L'Hopital. $\lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{2x+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{d}{dx}(x-1)}{\frac{d}{dx}(2x+3)}$ $= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ Concluimos que $\lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{2x+3} = \frac{1}{2}$

Ejemplo 4		
Límite	**Análisis**	**Aplicación**
Evaluar $\lim_{x\to\infty} \frac{3x}{e^x-1}$	Sabemos que nuestro primer paso es sustituir directamente el valor de x en el límite: $\lim_{x\to\infty} \frac{3x}{e^x-1} = \frac{3(\infty)}{e^\infty-1} = \frac{\infty}{\infty}$, por el mismo razonamiento del ejemplo anterior, podemos observar que se trata de una indeterminación.	Por lo tanto, podemos utilizar la regla de L'Hopital. $\lim_{x\to\infty} \frac{3x}{e^x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{d}{dx}(3x)}{\frac{d}{dx}(e^x-1)}$ $= \lim_{x\to\infty} \frac{3}{e^x} = \frac{3}{\infty} = 0$ Como tres dividido entre un número grande tiende a cero, por lo que concluimos que: $\lim_{x\to\infty} \frac{3x}{e^x-1} = 0$.

POR UNA EDUCACIÓN QUE GENERA CAMBIO

Ejemplo 5		
Límite	**Análisis**	**Aplicación**
Obtener $\lim_{x\to\infty} \frac{e^{3x}}{x^2}$	Evaluemos en valor de x en el límite, y veamos lo que se obtiene. $\lim_{x\to\infty} \frac{e^{3x}}{x^2} = \frac{e^{3(\infty)}}{\infty^2} = \frac{\infty}{\infty}$ por lo tanto, se trata de una indeterminación.	Aplicando la regla de L'Hopital tenemos que: $\lim_{x\to\infty} \frac{e^{3x}}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{d}{dx}(e^{3x})}{\frac{d}{dx}(x^2)}$ $= \lim_{x\to\infty} \frac{3e^{3x}}{2x}$ Ahora, sustituimos el valor de x en $\lim_{x\to\infty} \frac{3e^{3x}}{2x} = \frac{3e^{3(\infty)}}{2(\infty)} = \frac{\infty}{\infty}$, nos damos cuenta que se trata de otra indeterminación, para lo cual se vuelve aplicar la regla de L'Hopital. $\lim_{x\to\infty} \frac{3e^{3x}}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{d}{dx}(3e^{3x})}{\frac{d}{dx}(2x)}$ $= \lim_{x\to\infty} \frac{9e^{3x}}{2}$ Ahora sustituimos en este limite el valor de x y analicemos. $\lim_{x\to\infty} \frac{9e^{3x}}{2} = \frac{9e^{3(\infty)}}{2} = \frac{\infty}{2} = \infty$ Después de la segunda aplicación de la regla de L'Hopital, se observa $9e^{3x} \to \infty$, mientra que en el denominador permanece constante. Concluimos que $\lim_{x\to\infty} \frac{e^{3x}}{x^2} = \infty$

POR UNA EDUCACIÓN QUE GENERA CAMBIO

Recurso audiovisual

Para aprender más sobre la regla de L' Hopital escanea el QR o visita el siguiente link para ver el video:

https://youtu.be/UgyzVRS7ukA?list=PLunRFUHsCA1zHaYFyPsO6gXhBhqchox1x

Problemario TPV1-SA2-ACT03

Realizar los siguientes ejercicios.

1. Obtén $\frac{d^4y}{dx^4}$, si $y = x^4 - 2x^3 - 4x^2 - 5x + 2$.

2. El movimiento de la partícula se rige por la expresión $s(t) = 2t^2 - 3t + 5$, donde s se expresa en metros y t en segundos. Determina:
   a) La velocidad que alcanza al transcurrir $3\ segundos$.
   b) La velocidad final a los $5\ s$.
   c) Su aceleración en $t = 5\ s$.

3. El desplazamiento de un auto móvil está dado por la función $f(x) = 4t^2 - 2t + 3$, si el desplazamiento se mide en metro y el tiempo en segundos. Determina:
   a) La ecuación de la velocidad.
   b) La velocidad en $t = 2\ s$
   c) La aceleración en $t = 2\ s$

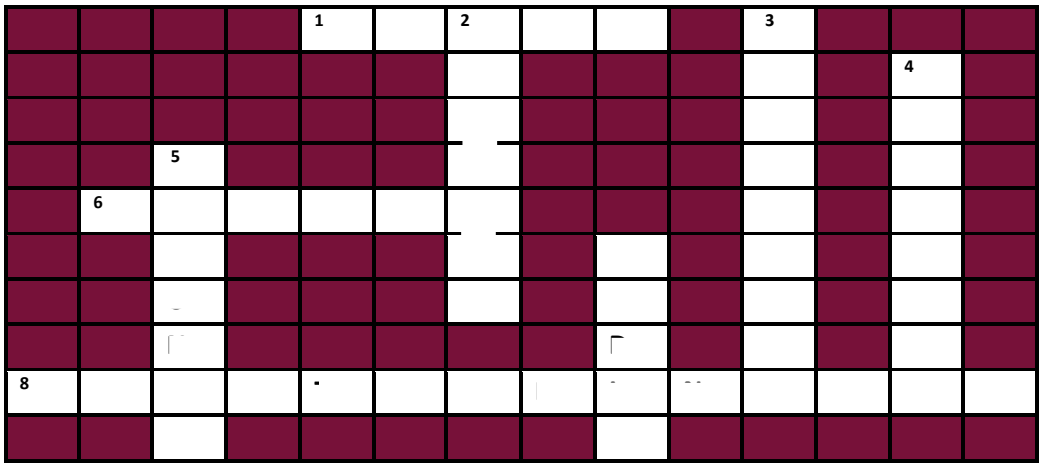
4. Obtener los siguientes límites:
   a. $\lim_{x\to 5} \frac{x^3-125}{x^2-25}$
   b. $\lim_{x\to 0} \frac{(x-2)^2-4}{x}$
   c. $\lim_{x\to \infty} \frac{e^x}{x^2+x}$

Reforzamiento

Progresión 5 y Progresión 6

Crucigrama

Instrucciones: Resuelve el crucigrama escribiendo las palabras correspondientes a cada pista, basadas en los temas de la Progresión 5 y 6. Es importante respetar la ortografía.



PISTAS:

HORIZONTAL

1. Matemático francés cuyo teorema establece que si *f(a)=f(b),* y la función es continua y diferenciable existe un punto c entre *a* y *b* donde f'(c)=0.

6. Apellido del físico y matemático inglés que desarrolló el método de las fluxiones, considerado como el precursor del cálculo diferencial moderno.

8. Palabra en plural que completa la siguiente expresión: "La regla de L'Hopital es utilizada para resolver límites con formas _____como 0/0 o ∞/∞".

VERTICAL

2. Apellido del matemático alemán que introdujo la notación $\frac{dy}{dx}$ para representar derivadas.

3. Tipo de derivada que se utiliza cuando la variable dependiente no está despejada en la ecuación, y se requiere aplicar derivación en ambos lados.

4. Función cuya gráfica se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel.

5. Palabra que completa la siguiente expresión: "Si se deriva la primera derivada se obtiene la _____ derivada".

7. Palabra que completa la siguiente expresión: "El Teorema del Valor _____ afirma que existe al menos un punto dentro de *a* y *b* donde la derivada de una función continua en el intervalo cerrado *[a,b]* y diferenciable en el intervalo abierto *(a,b)* es igual a la pendiente de la secante entre *a* y *b"*.

Reforzamiento

Progresión 5 y Progresión 6

Problemario

Instrucciones: Resuelve los siguientes ejercicios. Asegúrate de mostrar tus procedimientos y revisar tus respuestas antes de entregar.

1. Un vehículo particular conducido por Don Manuel Pérez, originario de Tabasco, fue detenido por un agente en La Isla, donde el límite de velocidad es de 90 km/h. Más adelante, recorrió 60 km en 35 minutos (equivalente a 0.583 h) y fue nuevamente detenido antes de llegar a Paraíso, acusado de haber excedido el límite de velocidad. ¿Consideras que la sanción fue justificada? Utiliza el Teorema del Valor Medio (TVM) para justificar tu respuesta.

2. Asuma que la función $f(x) = -x^2 - 14x$ cumple las condiciones del Teorema de Rolle en el intervalo $[-14, 0]$. Calcule el valor de c para el que $f'(c) = 0$.

Escriba aquí la ecuación.

3. Determina la derivada de la función $y^3 = 3x + 4y^2$

4. Determina $\frac{d^3y}{dx^3}$ de la función $y = \ln x$

Progresión 7:

Aplica y/o construye modelos para encontrar la solución de situaciones-problema de su contexto, usando la derivada como una herramienta que le permite interpretar y explicar fenómenos de variación estudiados por las ciencias considerando herramientas analíticas y/o tecnológicas en la modelación.

Metas de Aprendizaje	Categorías	Subcategorías
C2M1. Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.	**C2.** Procesos de intuición y razonamiento	**S1.** Capacidad para observar y conjeturar
C2M4. Argumenta a favor o en contra de afirmaciones acerca de situaciones, fenómenos o problemas propios de la matemática, de las ciencias o de su contexto.		
C3M3. Aplica procedimientos, técnicas y lenguaje matemático para la solución de problemas propios del pensamiento matemático, de áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno.	**C3.** Solución de problemas y modelación	**S1.** Uso de modelos
C3M2. Construye un modelo matemático, identificando las variables de interés, con la finalidad de explicar una situación o fenómeno y/o resolver un problema tanto teórico como de su entorno.		**S2.** Construcción de modelos
C3M4. Construye y plantea posibles soluciones a problemas de áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno, empleando técnicas y lenguaje matemático.		**S3.** Estrategias heurísticas y ejecución de procedimientos no rutinarios

Lectura: “Modelación matemática”

Conceptos Básicos de la Modelación Matemática

La modelación matemática es el arte y la ciencia de usar el lenguaje de las matemáticas para describir y entender situaciones del mundo real. Es una herramienta poderosa que nos permite analizar, predecir y tomar decisiones informadas sobre diversos fenómenos, desde la trayectoria de un proyectil hasta el crecimiento de una población.

Aquí te presentamos los conceptos fundamentales que necesitas conocer:

1. ¿Qué es un Modelo Matemático?

Un **modelo matemático** es una representación simplificada de un sistema o fenómeno del mundo real, expresada en términos matemáticos (ecuaciones, funciones, gráficos, etc.). No busca ser una copia exacta de la realidad, sino una herramienta útil que capture los aspectos más importantes del problema.

Analogía: Piensa en un mapa. Un mapa no es el terreno real, pero es una representación que te permite navegar y entender la geografía. Un modelo matemático es similar, pero en lugar de la geografía, representa relaciones y comportamientos.

2. Elementos Clave en la Modelación:

Variables: Son las cantidades que cambian o pueden variar en el problema. Se representan con letras (ej. x, y, t, P).

Variables Independientes: Son las que controlamos o que varían por sí mismas y afectan a otras variables (ej. tiempo, cantidad de fertilizante).

Variables Dependientes: Son las que cambian como resultado de la variación de las variables independientes (ej. altura, producción de cultivos).

Parámetros: Son valores constantes dentro de un modelo específico que representan características fijas del sistema (ej. una tasa de crecimiento constante, la gravedad). A diferencia de las variables,

los parámetros no cambian durante el análisis de un modelo particular, aunque podrían cambiar si el modelo se aplica a una situación diferente.

Relaciones (Ecuaciones/Funciones): Son las expresiones matemáticas que describen cómo se conectan las variables y los parámetros. Pueden ser ecuaciones lineales, cuadráticas, exponenciales, etc., dependiendo de la naturaleza del fenómeno.

3. El Proceso de Modelación Matemática:

La modelación no es un evento único, sino un ciclo que generalmente incluye los siguientes pasos:

a) Comprender el Problema (Formulación):

Identificar claramente lo que se quiere modelar y por qué.

Definir el objetivo del modelo (¿Qué queremos predecir? ¿Qué queremos entender?).

Identificar las variables y parámetros relevantes.

Hacer suposiciones simplificadoras (¿Qué podemos ignorar para que el problema sea manejable sin perder su esencia?).

b) Formular el Modelo Matemático:

Traducir la información del problema a un lenguaje matemático.

Establecer las ecuaciones o funciones que describen las relaciones entre las variables.

Elegir el tipo de función o ecuación más adecuado (lineal, exponencial, cuadrática, etc.).

c) Resolver el Modelo:

Utilizar técnicas matemáticas (álgebra, cálculo, estadística, graficación) para obtener resultados del modelo.

Esto puede implicar resolver ecuaciones, graficar funciones, calcular valores específicos.

d) Interpretar los Resultados:

Traducir las soluciones matemáticas de vuelta al contexto del problema original.

¿Qué significan los números obtenidos en términos del fenómeno real?

e) Validar y Refinar el Modelo:

Comparar los resultados del modelo con datos reales (si los hay).

¿El modelo predice lo que observamos? ¿Es razonable?

Si el modelo no es preciso, volver a los pasos anteriores para revisar suposiciones, ajustar parámetros o reformular las relaciones. La modelación es un proceso iterativo.

4. Tipos Comunes de Modelos:

Modelos Lineales: Describen relaciones donde una variable cambia a una tasa constante con respecto a otra (ej. y = m x + b). Útiles para situaciones de crecimiento o decrecimiento constante.

Modelos Cuadráticos: Describen relaciones donde una variable depende del cuadrado de otra (ej. $\mathbf{y} = \mathbf{a}x^2 + \mathbf{b}x + c$). Útiles para describir trayectorias parabólicas o fenómenos con un punto máximo/mínimo.

Modelos Exponenciales: Describen situaciones de crecimiento o decrecimiento muy rápido, donde la tasa de cambio es proporcional a la cantidad actual (ej. crecimiento poblacional, desintegración radioactiva).

Modelos de Proporcionalidad Directa/Inversa: Casos especiales de relaciones lineales o de potencia donde una cantidad es un múltiplo o un inverso de otra.

5. Importancia de la Modelación Matemática:

Resolución de Problemas: Permite abordar problemas complejos de manera estructurada.

Predicción: Ayuda a prever el comportamiento futuro de un sistema.

Toma de Decisiones: Proporciona información para tomar decisiones informadas en diversas áreas (negocios, ciencia, ingeniería, salud).

Comprensión: Ayuda a entender mejor cómo funcionan los fenómenos del mundo real.

Desarrollo del Pensamiento Crítico: Fomenta la habilidad de analizar, simplificar y abstraer problemas.

La modelación matemática es una habilidad esencial en el siglo XXI, ya que nos permite aplicar el conocimiento matemático para entender y dar solución a los desafíos que enfrentamos en nuestro día a día y en diversas profesiones.

Ejemplo de Modelación Matemática:

Vamos a aplicar los conceptos de variables, parámetros, relaciones y el proceso de modelación a situaciones cotidianas o fenómenos sencillos.

El Costo de un Viaje en Taxi

Un taxi en Villahermosa, Tabasco, cobra una tarifa fija por abordarlo y luego un costo adicional por cada kilómetro recorrido. Queremos modelar el costo total del viaje.

a) Comprender el Problema:

Objetivo: Determinar el costo total de un viaje en taxi en función de la distancia.

Variables:

Variable Independiente: Distancia recorrida (d, en kilómetros).

Variable Dependiente: Costo total del viaje (C, en pesos mexicanos).

Parámetros (valores que se mantendrían fijos para este modelo de taxi):

Tarifa por abordarlo (a, en pesos mexicanos).

Costo por kilómetro (k, en pesos mexicanos/kilómetro).

Suposiciones: El costo por kilómetro es constante y no hay recargos adicionales (por tiempo de espera, horario, etc.).

b) Formular el Modelo Matemático: La relación es lineal: el costo total es la tarifa fija más la distancia multiplicada por el costo por kilómetro.

Modelo: $C = a + k \cdot d$

c) Resolver el Modelo (con valores de ejemplo): Supongamos que el abordar el taxi es de $25.00 y el costo por kilómetro es de $10.00.

$a = 25$

$k = 10$

El modelo específico sería: $C = 25 + 10 \cdot d$

Si un viaje es de 5 km ($d = 5$): $C = 25 + 10 \cdot 5 = 25 + 50 = 75$

Si un viaje es de 12 km (d = 12): C = 25 + 10·12 = 25 + 120 = 145

d) Interpretar los Resultados:

Un viaje de 5 km costaría $75.00.

Un viaje de 12 km costaría $145.00.

e) Validar y Refinar:

Podríamos preguntar a un taxista real o ver tarifas publicadas para verificar si el modelo es preciso. Si las tarifas varían por la hora o el tráfico, podríamos necesitar un modelo más complejo.

Para obtener una gráfica que represente el modelo del costo de un viaje en taxi, seguiremos estos pasos. Recuerda que el modelo que obtuvimos es una **función lineal**, por lo que su gráfica será una línea recta.

1. Entender el Modelo y sus Componentes

Nuestro modelo es: C=25+10·d

C (Costo total): Esta es la **variable dependiente**, la que graficaremos en el **eje vertical (eje Y)**.

d (Distancia): Esta es la **variable independiente**, la que graficaremos en el **eje horizontal (eje X)**.

25 (Abordaje): Es el punto de corte con el eje Y, lo que se paga incluso si no se recorre distancia.

10 (Costo por km): Es la pendiente de la recta, indica cuánto aumenta el costo por cada kilómetro adicional.

2. Generar Puntos para la Gráfica (Tabla de Valores)

Para graficar una línea recta, solo necesitas un mínimo de dos puntos, pero calcular tres o cuatro te ayudará a verificar que no haya errores y a tener una mejor idea de la escala. Elige valores lógicos para la distancia (d), ya que no podemos tener distancias negativas en este contexto.

Distancia (d en km)	Cálculo: C=25+10·d	Costo (C en $)	Punto (d, C)
0	C=25+10·0=25+0	25	(0, 25)
5	C=25+10·5=25+50	75	(5, 75)
10	C=25+10·10=25+100	125	(10, 125)
15	C=25+10·15=25+150	175	(15, 175)

3. Preparar los Ejes de la Gráfica

Usa papel milimétrico o una herramienta de graficación digital como GeoGebra.

Eje Horizontal (Eje X o eje de la Distancia): Etiquétalo como "Distancia (km)". Elige una escala adecuada para los valores de distancia que calculaste (por ejemplo, de 0 a 20 km, con incrementos de 1 o 2 km).

Eje Vertical (Eje Y o eje del Costo): Etiquétalo como "Costo ($)". Elige una escala adecuada para los valores de costo que calculaste (por ejemplo, de 0 a 200 $, con incrementos de 10 o 25 $).

4. Ubicar los Puntos en la Gráfica

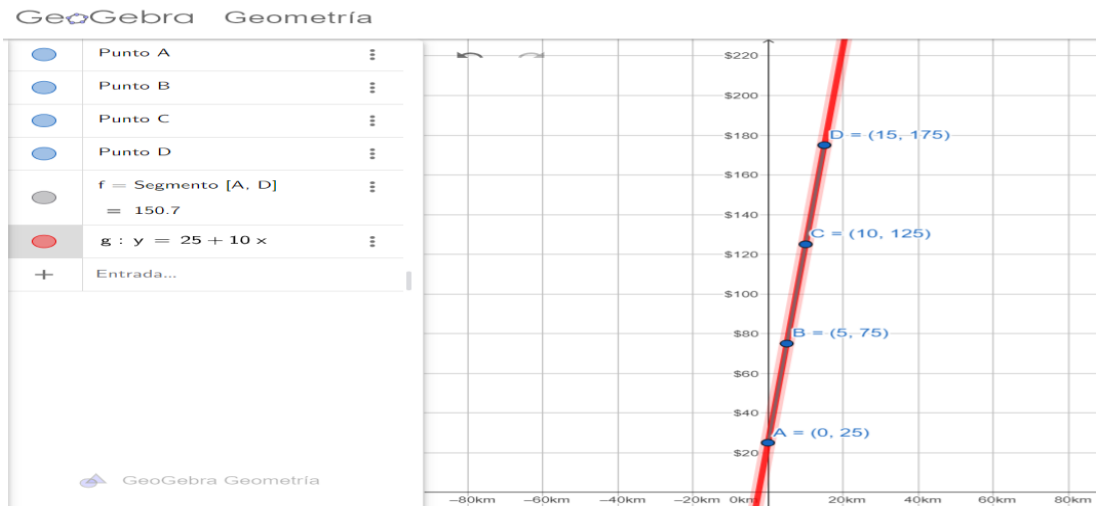
Ubica cada uno de los puntos que calculaste en el paso 2 sobre tus ejes coordenados.

- **(0, 25):** Parte del eje Y, a 25. Este es al abordar.
- **(5, 75):** Muévete 5 unidades a la derecha en el eje de la distancia, y luego 75 unidades hacia arriba en el eje del costo.
- **(10, 125):** Muévete 10 unidades a la derecha, luego 125 unidades hacia arriba.
- **(15, 175):** Muévete 15 unidades a la derecha, luego 175 unidades hacia arriba.

5. Dibujar la Línea

Una vez que tengas los puntos graficados, únelos con una línea recta. Dado que la distancia no puede ser negativa en este contexto, la línea comenzará en el punto (0, 25) y se extenderá hacia la derecha.

La gráfica en GeoGebra quedaría así:



6. Interpretar la Gráfica

La gráfica te permite visualizar rápidamente la relación entre la distancia recorrida y el costo.

Puedes ver que a medida que la distancia aumenta, el costo también aumenta de manera constante (debido a la pendiente de 10).

El punto donde la línea cruza el eje del Costo (eje Y) es el banderazo ($25), mostrando el costo inicial antes de recorrer cualquier distancia.

Si quieres saber cuánto costaría un viaje de, digamos, 7 km, puedes encontrar 7 en el eje de la Distancia, subir verticalmente hasta la línea y luego moverte horizontalmente al eje del Costo para leer el valor (debería ser $95).

De esta manera puedes generar fácilmente una representación visual del modelo lineal del costo del taxi, lo que facilita la comprensión de cómo la distancia afecta el precio.

Problemario TPV1-SA2-ACT04

Modelación

1. Un tinaco con forma cilíndrica con una capacidad de almacenamiento máximo de 1100 $litros$; se encuentra al límite de su capacidad. A las 8 horas del día unos jóvenes accidentalmente agrietan el tinaco con una pelota de béisbol; justo a la mitad, la grieta genera un flujo de agua constante de 75 $litros\ por\ cada\ hora$. Con esta información, realice lo que se pide:

a) Elabora una tabla que establezca una relación entre la hora del día y la cantidad de litros que le queda al tinaco

b) Escriba el rango de valores de la hora y de la cantidad de litros que quedan

2. La altura de una pelota t segundos después de ser lanzada verticalmente al aire desde lo alto de un edificio puede modelarse mediante $h(t)$=−16t2+48t+64, donde $h(t)$ es la altura en pies. ¿Qué tan alto es el edificio, qué tan alto se eleva la pelota antes de comenzar a caer hacia abajo y después de cuántos segundos la pelota golpea el suelo?

3. Una ameba es un ser unicelular que se reproduce por bipartición (cada ameba se duplicará y se convertirá en 2 amebas idénticas). Si partimos de un cultivo de 800 amebas que se producen cada hora. ¿Cuántas amebas tendremos a las 10 horas?

4. El valor de un coche se devalúa en 10% cada año que pasa. Si su valor inicial es de 24 000 pesos. ¿Cuánto tiempo debe pasar para que cueste solo 10 000 pesos?

POR UNA EDUCACIÓN QUE GENERA CAMBIO

Lectura: "Máximos, mínimos y puntos de inflexión"

Aplicaciones de la derivada (optimización, máximos, mínimos, puntos de inflexión)

Aplicación de modelos matemáticos con derivadas en la interpretación de fenómenos de variación.

Los modelos matemáticos basados en derivadas tienen aplicaciones en una amplia variedad de contextos científicos, económicos y tecnológicos. He aquí algunos ejemplos:

1. Física y movimiento

- **Cálculo de velocidad y aceleración:** La derivada de la posición con respecto al tiempo nos da la velocidad, y la derivada de la velocidad nos da la aceleración.
- **Dinámica de fluidos:** Se usa para modelar el comportamiento de líquidos y gases, por ejemplo, en la aerodinámica de aviones.

2. Economía y finanzas

- **Optimización de ingresos y costos:** Las derivadas permiten encontrar los puntos óptimos de producción para maximizar ganancias o minimizar costos.
- **Modelos de crecimiento económico:** Se aplican en el análisis de tasas de crecimiento del PIB y proyecciones financieras.

3. Biología y medicina

- **Modelos de crecimiento poblacional:** Se utilizan para estudiar la expansión de especies en un ecosistema o el crecimiento de células en un cultivo.
- **Farmacocinética:** Se aplican derivadas para modelar la velocidad de absorción y eliminación de medicamentos en el cuerpo.

4. Ingeniería y tecnología

- **Control de sistemas: En ingeniería de control, las derivadas ayudan a diseñar sistemas que regulan temperatura, presión y otros parámetros.**
- **Optimización de estructuras: Se usan en arquitectura e ingeniería civil para maximizar resistencia y minimizar costos de materiales.**

5. Ciencias ambientales

- **Cambio climático: Se emplean modelos derivados para analizar tasas de variación en temperatura, niveles de CO_2 y otros indicadores ambientales.**
- **Dinámica de ecosistemas: Se aplican en el estudio de la evolución de recursos naturales y el impacto de la actividad humana.**

El modelaje matemático es un sistema usado para representar algebraicamente, por medio de funciones, lenguaje o simbología matemática, diversos problemas que provienen de situaciones que se presentan en la vida real o hipotética, esto con el fin de que se pueda llegar a una solución u optimización requerida, que tiene como base la situación real o hipotética, a través de métodos matemáticos, físicos, químicos, analítico, etc, necesarios.

El modelaje matemático es aplicable a todas las demás ciencias, razón por la cual el calculo cobra mucho potencial.

Es importante indicar que para realizar un modelo matemático de optimización de una situación real o hipotética no existe un modelo especifico y riguroso a seguir, pero si existen ciertas reglas o pasos útiles que a continuación se presentan:

1. Comprende bien la situación presentada, apóyate si es necesario, de un diagrama, reconoce que es lo que se desea saber.
2. Identifica los datos de la situación, tanto lo conocidos como los que se buscan conocer, algunos serán las variables que entraran en juego en el problema, identifica quienes son la variable dependiente e independiente, como se relacionan entre si, usa las letras que desees para identificarlas.

3. Formula las expresiones algebraicas que sean posibles, de manera que la variable dependiente quede en términos de la variable independiente. Esta relación será el modelo matemático de la situación.

4. Aplica el criterio de optimización necesario o requerido (Criterio de la primera o segunda derivada) con el fin de hallar los valores que satisfacen la situación planteada y escribe tu respuesta en términos de la problemática original.

5. Realiza un trazo del modelo y su solución si es necesario.

Cálculo diferencial 1 edición Julio 2011 Colegio de bachilleres del estado de Yucatán.

CRITERIOS DE LA PRIMERA Y SEGUNDA DERIVADA

Las derivadas son herramientas fundamentales del cálculo que nos permiten analizar el comportamiento de una función y optimizar procesos en diversas áreas. En particular, los **criterios de la primera y segunda derivada** nos ayudan a determinar aspectos clave como el crecimiento o decrecimiento de una función, la presencia de máximos y mínimos, la concavidad y los puntos de inflexión.

La aplicación de estos criterios es esencial en problemas de optimización en la vida real, como la planificación de rutas eficientes, el diseño estructural, la gestión de costos en empresas y la predicción de tendencias en modelos matemáticos. Con estas herramientas, podemos tomar decisiones fundamentadas para mejorar procesos y resolver problemas con precisión.

A continuación se muestran los pasos de estos criterios:

El **criterio de la primera derivada** nos indica dónde una función es creciente o decreciente, permitiéndonos localizar puntos críticos donde la pendiente se anula. Estos puntos son candidatos para máximos o mínimos locales, dependiendo del comportamiento de la función en los alrededores.

Pasos:

Paso 1: Calcular la primera derivada

Dada una función (f(x)), encuentra su derivada: [f'(x)] Esta derivada indica la tasa de cambio de la función.

Paso 2: Igualar la derivada a cero

Encuentra los puntos críticos resolviendo: [f'(x) = 0] Estos valores de (x) son candidatos para máximos, mínimos o puntos de inflexión.

Paso 3: Analizar el signo de (f'(x))

Establece una tabla de signos evaluando (f'(x)) en puntos cercanos a los valores críticos:

- Si (f'(x) > 0), la función crece en ese intervalo.
- Si (f'(x) < 0), la función decrece en ese intervalo.

Paso 4: Determinar máximos y mínimos

- Si (f'(x)) **cambia de positivo a negativo** en un punto crítico, ahí **hay un máximo local**.
- Si (f'(x)) **cambia de negativo a positivo**, ahí **hay un mínimo local**.

Si al realizar el análisis del punto 3, **la derivada no cambia de signo**, entonces, la función **no tiene máximo ni mínimo**, si no que tiene **un punto de inflexión**.

Por otro lado, el **criterio de la segunda derivada** nos proporciona información sobre la curvatura de la función. Si la segunda derivada es positiva, la función es **cóncava hacia arriba**, lo que indica un mínimo local. Si es negativa, es **cóncava hacia abajo**, lo que sugiere un máximo local. Además, cuando la segunda derivada se anula y cambia de signo, encontramos un **punto de inflexión**, donde la concavidad cambia.

Pasos:

Paso 1: Calcular la primera y segunda derivada

Dada una función (f(x)), encuentra:

- La primera derivada (f'(x)), que indica la pendiente de la función.
- La segunda derivada (f''(x)), que indica la concavidad y los posibles puntos de inflexión.

Paso 2: Hallar los **puntos de inflexión**

Un punto de inflexión ocurre cuando la concavidad cambia, lo que sucede cuando: [f''(x) = 0] Resuelve esta ecuación para encontrar los valores de (x) candidatos.

Paso 3: Determinar la concavidad

- Si (f''(x) > 0) → la función es cóncava hacia arriba y tiene forma de "U".
- Si (f''(x) < 0) → la función es cóncava hacia abajo y tiene forma de "∩".

Paso 4: Hallar máximos y mínimos

- Si (f'(x) = 0) en un punto crítico y (f''(x) > 0), es un mínimo local.
- Si (f'(x) = 0) en un punto crítico y (f''(x) < 0), es un máximo local.

Recurso audiovisual

El siguiente enlace muestra un video de los criterios de la primera y segunda derivada:

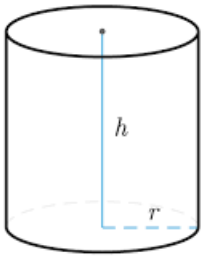
https://youtu.be/yVWvNE5G6_Y?si=1rKp0V3v7uwgrRbz

A continuación, mediante un ejemplo, abordaremos la modelación matemática de optimización y la aplicación de los pasos de estos dos criterios…

Ejemplo1: Dimensionado de envase

Se desean fabricar envases cilíndricos de hojalata para lubricante con un volumen (**V) de 500 ml**.

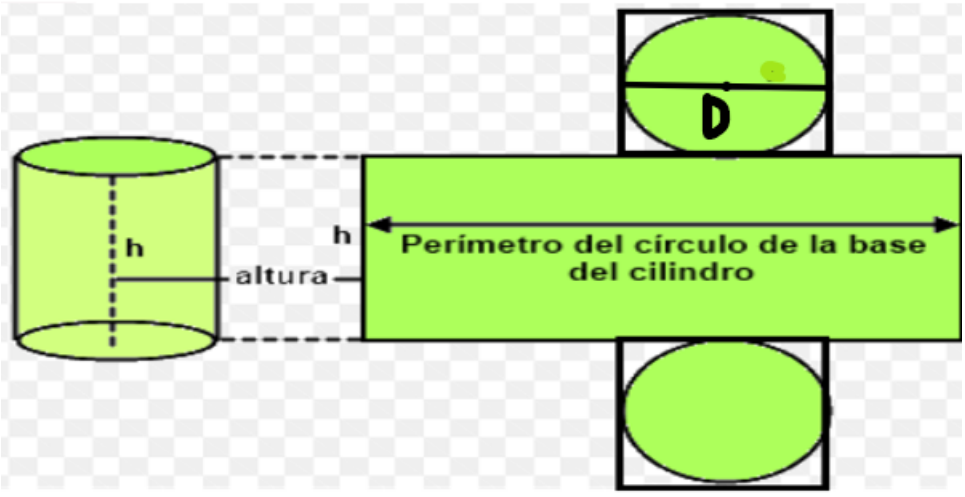
No se desperdicia material al cortar la hoja que constituye la pared cilíndrica, pero las bases se recortan de trozos cuadrados como indica la figura, desperdiciándose los recortes.



Halla la relación entre la altura y el diámetro de la base para que el gasto de material incluido el desperdicio, sea **mínimo.**

Pasos del modelaje matemático de optimización:

1. Se busca una expresión que relacione la altura y el diámetro de la base del envase en forma de cilindro y así optimizar el material a utilizar. Para ello se debe cuantificar el material a utilizar para su construcción. Por lo que se obtiene el siguiente esquema:



2. Se sabe que el volumen de un cilindro está en función de su diámetro y su altura. Se le asigna a la altura la literal h, al diámetro la literal d, a la superficie total la literal S y al volumen la literal V.

3. La superficie total de hojalata utilizada en el envase será la suma de la superficie lateral del cilindro, que en este caso es el perímetro de la base circular, $2\pi r = \pi d$, multiplicada por su altura h, más el doble de la superficie de un cuadrado de lado d.

La superficie total S será entonces: $S = \pi dh + 2d^2$ ..... (1)

El volumen dado V establece una relación entre las variables d y h.

$V = \frac{\pi d^2 h}{4}$, como V=500 se tiene: $500 = \frac{\pi d^2 h}{4}$ ..... (2)

Entonces, se tiene un sistema de ecuaciones 2 x 2 y se resuelve de la siguiente manera:

Despejando h de (2) y sustituyendo en (1) obtenemos finalmente:

$S(d) = \frac{\pi d 4(500)}{\pi d^2} + 2d^2$, simplificando, $S(d) = \frac{2000}{d} + 2d^2$

Donde d es mayor a 0.

4. Aplicando los pasos del criterio de la primera derivada:

$$S(d) = \frac{2000}{d} + 2d^2$$

Paso 1 se obtiene la derivada de la función

$\mathbf{S'(d)} = \frac{\mathbf{-2000}}{\boldsymbol{d^2}} + 4d$ **,** factorizando por factor común, $\mathbf{S'(d)} = 4(\frac{\mathbf{-500}}{\boldsymbol{d^2}} + \boldsymbol{d})$

Paso 2 Se igualan a cero los factores y se despeja d

$\frac{\mathbf{-500}}{\boldsymbol{d^2}} + \boldsymbol{d} = \mathbf{0}$

$\boldsymbol{d} = \frac{\mathbf{500}}{\boldsymbol{d^2}}$

$\boldsymbol{d^3}$ = 500

$\boldsymbol{d}$ = $\sqrt[3]{\mathbf{500}}$

$\boldsymbol{d} = \mathbf{7.94}$

Paso 3 Analizar el signo de f'(x) en los puntos d1 = 7.5 y d2= 8.5

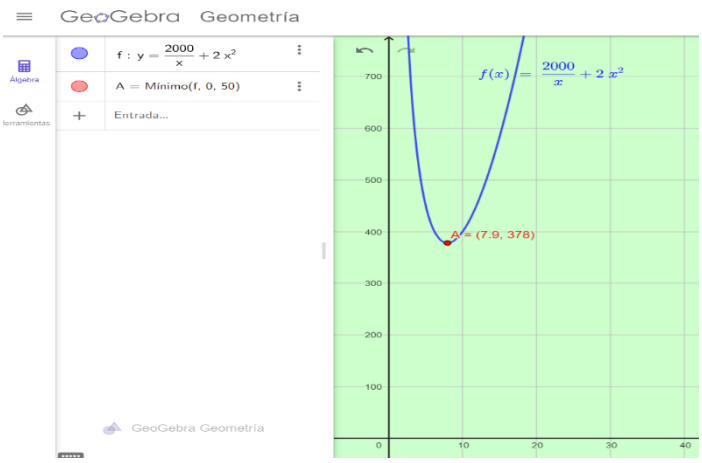
$\mathbf{S'(7.5)} = 4\left(\frac{\mathbf{-500}}{\mathbf{(7.5)^2}} + \mathbf{7.5}\right)$ = - 5.56

$\mathbf{S'(8.5)} = 4(\frac{\mathbf{-500}}{\mathbf{(8.5)^2}} + \mathbf{8.5})$ = + 6.32

Como: S´(7.5) < 0), la función decrece en ese intervalo.

Como: S´(8.5) > 0), la función crece en ese intervalo.

Lo cual se aprecia en la siguiente gráfica elaborada en Geogebra:



Paso 4 Determinar **máximos y mínimos**

Como (f'(x)) cambia de negativo a positivo, ahí hay un mínimo local.

Ahora aplicando los pasos del criterio de la segunda derivada:

Paso 1: Calcular la primera y segunda derivada

Se procede a calcular la segunda derivada ya que la primera, $\mathbf{S´(d)} = 4(\frac{-500}{d^2} + \boldsymbol{d})$ se calculó en el criterio de la primera derivada:

$$\mathbf{S´´(d)} = 4(\frac{1000}{d^3} + 1)$$

Paso 2 y 3: Hallar los puntos de inflexión y Determinar la concavidad

Como $\mathbf{S´´(7.94)} = 4(\frac{1000}{(7.94)^3} + 1)$ **= 11.99, es decir,** f''(x) > 0) → la función es **cóncava hacia arriba** y tiene forma de "U".

Paso 4: Hallar máximos y mínimos

Como $S''(7.94) = 4(\frac{1000}{(7.94)^3} + 1)$ **= 11.99, o sea, (f''(x) > 0)**, es un **mínimo local**.

Por lo tanto, la relación entre la altura (h) y el diámetro (d) de la base para que el gasto de material incluido el desperdicio, sea mínimo es:

$\frac{h}{d} = \frac{4(500)/\pi(7.94)^2}{7.94} = \frac{2000}{\pi\,(7.94)^3}$ = 1.27 , es decir, h = 1.27d.

La altura **(h)** del cilindro debe ser **1.27 veces** el diámetro **(d)** de la base para que el área total sea la menor posible, es decir, para que el gasto de material incluido el desperdicio, sea **mínimo.**

El siguiente enlace muestra un video de los fundamentos de optimización con derivadas.

https://youtu.be/BJ9flDp9qM8?si=uRDE5fONrtTmbSEZ

https://www.youtube.com/watch?v=hCsEbEZ_KAo

Ejemplo 2: Calcular el volumen máximo de una caja sin tapa

Se quiere construir una caja sin tapa a partir de una lámina de cartón de 20 cm por 10 cm. Para ello, se corta un cuadrado de lado x en cada esquina y se doblan los lados. ¿Cuál es el valor de x maximiza el volumen de la caja? Resolver paso a paso.

Para resolver este problema, necesitamos encontrar el valor de x que maximiza el volumen de la caja.

Paso 1: Entender las dimensiones de la caja.

La lámina de cartón tiene 20 cm de largo y 10 cm de ancho. Se corta un cuadrado de lado x en cada esquina.

Al cortar los cuadrados de las esquinas y doblar los lados, las dimensiones de la caja serán:

- **Largo de la base:** La longitud original de 20 cm se reduce en 2x (se quitan x de cada lado). Entonces, el largo es 20−2x.
- **Ancho de la base:** La anchura original de 10 cm se reduce en 2x. Entonces, el ancho es 10−2x.
- **Altura de la caja:** La altura de la caja será x, ya que es la longitud del lado del cuadrado que se cortó en cada esquina.

Paso 2: Escribir la fórmula del volumen de la caja.

El volumen (V) de una caja rectangular se calcula multiplicando el largo por el ancho por la altura.

V=Largo × Ancho × Altura

V(x) = (20−2x) (10−2x) (x)

Paso 3: Expandir la expresión del volumen.

Vamos a expandir la expresión para facilitar la derivación:

V(x) = (200−40x−20x+$4x^2$) (x)

V(x) = (200 − 60x + $4x^2$) (x)

V(x)= $4x^3$− $60x^2$+200x

Paso 4: Encontrar el dominio de la función.

Para que las dimensiones de la caja sean válidas (positivas), debemos tener:

- $X > 0$
- $20-2x > 0 \Rightarrow 20 > 2x \Rightarrow x < 10$
- $10-2x > 0 \Rightarrow 10 > 2x \Rightarrow x < 5$

Por lo tanto, el dominio de x es $0 < x < 5$.

Paso 5: Derivar la función de volumen.

Para encontrar el valor de x que maximiza el volumen, necesitamos encontrar la primera derivada de V(x) e igualarla a cero.

$V'(x)=\frac{d}{dx}(4x^3-60x^2+200x)$

$V'(x)= 12x^2-120x+200$

Paso 6: Igualar la derivada a cero y resolver para x.

$12x^2-120x+200=0$

Podemos simplificar la ecuación dividiendo por 4:

$3x^2-30x+50=0$

Usamos la fórmula cuadrática para resolver para $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2+4ac}}{2a}$

Donde a=3, b=−30, y c=50.

$x = \frac{-(-30)\pm\sqrt{(-30)^2+4(3)(50)}}{2(3)}$

$x = \frac{30\pm10\sqrt{3}}{6}$

Esto nos da dos posibles valores para x:

x_1=7.887, escogiendo la ruta positiva

x_1=2.113 escogiendo la ruta negativa

Paso 7: Evaluar cuál valor de x está en el dominio y maximiza el volumen.

Recordemos que el dominio válido para x es $0 < x < 5$.

- $x_1 \approx 7.887$ no está dentro del dominio, ya que es mayor que 5.
- $x_2 \approx 2.113$ sí está dentro del dominio, ya que es mayor que 0 y menor que 5.

Para confirmar que x_2 maximiza el volumen, podemos usar la segunda derivada.

Paso 8: (Opcional) Usar la segunda derivada para confirmar el máximo.

$V''(x) = \frac{d}{dx}(12x^2 - 120x + 200)$

$V''(x) = 24x - 120$

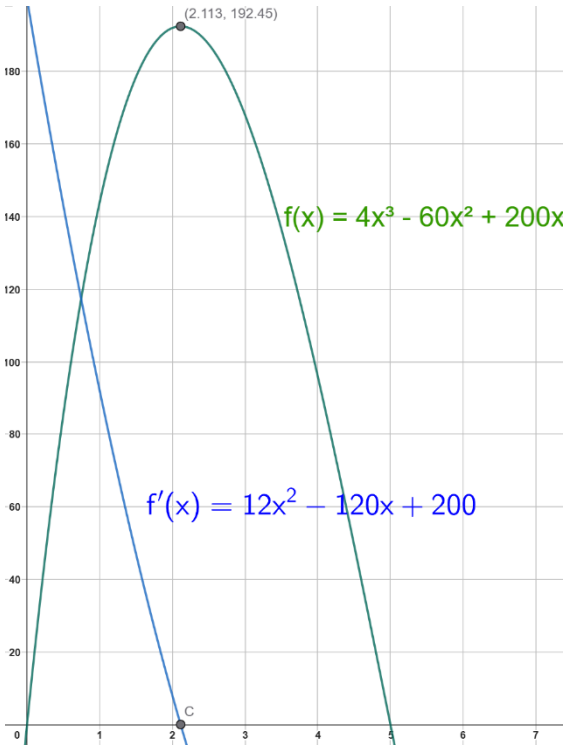
Ahora, evaluamos $V''(x)$ en $x_2 \approx 2.113$:

$V''(2.113) = 24(2.113) - 120 = 50.712 - 120 = -69.288$

Dado que $V''(2.113)$ es negativo, esto confirma que $x \approx 2.113$ corresponde a un máximo local.

Conclusión:

El valor de x que maximiza el volumen de la caja es aproximadamente 2.113 cm.



Problemario TPV1-SA2-ACT05

Máximos, mínimos y puntos de inflexión

POR UNA EDUCACIÓN QUE GENERA CAMBIO

1.- Encuentra los máximos y mínimos de la función F(x) = $x^3 - 6x^2 + 5x$.

A. Máximo en x = 0, Mínimo en x = 4.

B. Máximo en x = 2, Mínimo en x = 0.

C. No tiene Máximos ni Mínimos locales.

D. Máximo en x = 4, Mínimo en x = 0.

2.- Determina el punto de inflexión de la función G(x) = $x^4 - 4x^3 + 10$.

A. x = 0 y x = 2

B. Solo en x = 2

C. No tiene puntos de inflexión.

D. x=0 y x = 3

3.- El costo de producir x artículos esta dado por la función C(x) = $100 + 50x - 0.1x^2$. ¿Cuál es el costo marginal al producir 200 artículos?

A.$50

B.$40

C.$10

D.$200

4.- Se desea cercar un terreno rectangular de área 1800 metros cuadrados. Uno de los lados colinda con un terreno y no necesita cerca. ¿Cuáles serán las dimensiones que minimizan la longitud de la cerca necesaria?

A. Lado paralelo al terreno = 60 m, otros dos lados = 30 m.

B. Lado paralelo al terreno = 45 m, otros dos lados = 40 m.

C. Lados de 302 m.

POR UNA EDUCACIÓN QUE GENERA CAMBIO

Progresión 8:

Construye modelos matemáticos, identificando las variables que se relacionan entre sí, obteniendo de manera intuitiva la diferencial como una herramienta para darle solución a problemas de las ciencias que le permita obtener información y analizar los resultados para la toma de decisiones.

Metas de Aprendizaje	Categorías	Subcategorías
C1M2. Analiza los resultados obtenidos al aplicar procedimientos algorítmicos propios del pensamiento matemático en la resolución de problemáticas teóricas y de su contexto.	**C1.** Procedural	**S1.** Elementos arimético-algebraicos
		S3. Elementos variacionales
C2M1. Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.	**C2.** Procesos de intuición y razonamiento	**S1.** Capacidad para observar y conjeturar
C2M4. Argumenta a favor o en contra de situaciones, fenómenos o problemas propios de la matemática, de las ciencias o de su contexto.		**S2.** Pensamiento intuitivo
C3M2. Construye un modelo matemático, identificando las variables de interés, con la finalidad de explicar una situación o fenómeno y/o resolver un problema tanto teórico como de su entorno.	**C3.** Solución de problemas y modelación	**S2.** Construcción de modelos

C3M3. Aplica procedimientos, técnicas y lenguaje matemático para la solución de problemas propios del pensamiento matemático, de áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno.		**S3.** Estrategias heurísticas y ejecución de procedimientos rutinarios

POR UNA EDUCACIÓN QUE GENERA CAMBIO

Lectura: “La diferencial como herramienta para la aproximación”

Diferencial (concepto intuitivo, notación e interpretación)

Aplicaciones de la diferencial (aproximaciones, cálculo de errores, estimaciones)

El concepto de diferencial es una herramienta fundamental en el cálculo que nos permite aproximar cambios en una función. Está íntimamente relacionado con la derivada y proporciona una manera lineal de estimar cómo una variable dependiente cambia en respuesta a un pequeño cambio en una variable independiente.

Concepto Intuitivo de la Diferencial

Imagina que estás caminando por una colina (que representa una función matemática). Si quieres saber qué tan empinada está la colina *justo en el punto donde estás parado*, no te interesa el promedio de inclinación de toda la colina, sino la inclinación en ese instante.

La simbología utilizada para expresar la derivada de una función, la cual nos servirá para entender el concepto de la diferencial, es la siguiente:

Notación	Símbolo para la Primera Derivada	Uso Típico
Leibniz	dx / dy o df/dx	General, explícito
Lagrange	f ’ (x) o y’	Matemáticas (funciones)
Newton	$\dot{y}$ o $\dot{x}$	Física (respecto al tiempo)
Euler	Dy o D f(x)	Ecuaciones Diferenciales

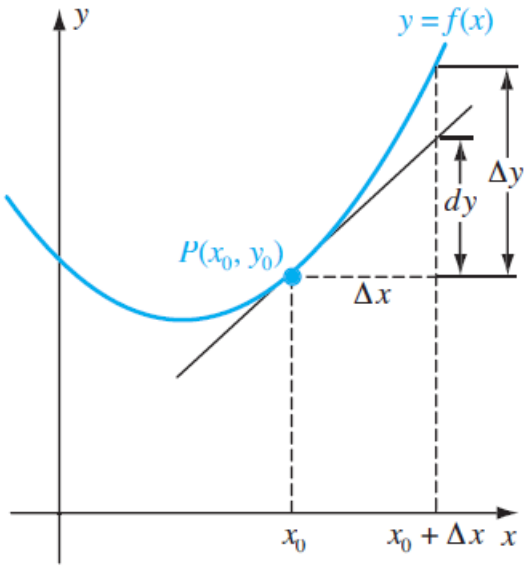
La **diferencial** es una forma de medir ese cambio *instantáneo* o *infinitesimal* en una función. No es el cambio total, sino una aproximación de cuánto cambiaría la función si la variable independiente cambiara "muy poquito".

Concepto

La notación de Leibniz dy/dx ha sido utilizada para la derivada de y respecto a x. La notación dy/dx se ha utilizado como un operador para la derivada respecto a x.

Definición:

Sea $y = f(x)$ una función derivable de la variable independiente x. Δx es un incremento arbitrario en la variable independiente x. dx, denominada la **diferencial de la variable independiente** x, es igual a Δx. Δy es el cambio real en la variable y cuando x cambia de x a $x + \Delta x$; esto es, $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. dy, llamada la **diferencial de la variable dependiente** y, se define como $dy = f(x)\,dx$.



Purcell, E. J., Varberg, D., & Rigdon, S. E. (2007). Cálculo Diferencial e Integral (9a ed.). Pearson Educación.

Pag 143

Importante. Las derivadas y las diferenciales no son lo mismo. Cuando usted escribe *dy/dx*, está utilizando el símbolo de la derivada; cuando escribe *dy*, está denotando una diferencial.

Aplicaciones de la Diferencial

La belleza de la diferencial es que nos permite estimar cambios sin necesidad de calcular el cambio exacto en la función, lo cual puede ser más complicado. La diferencial tiene, entre otras, las siguientes aplicaciones:

Cálculo de Errores (Propagación del Error)

Las diferenciales son muy útiles para estimar cómo un pequeño error en una medición (o en la variable independiente) se propaga y afecta el cálculo de una cantidad relacionada.

Si tienes una medición x con un posible error dx (que es el error en la entrada) y calculas una cantidad y = f (x). El error aproximado en y (es decir, dy) debido al error en x se calcula como:

$$Dy = f'(x)\,dx$$

Ejemplo:

Imagina que mides el lado (L) de un cuadrado y obtienes 10 cm, pero sabes que la medición podría tener un error de ± 0.1 cm. ¿Cuál es el error aproximado en el cálculo del área del cuadrado?

La función del área es $A(L) = L^2$, donde L es el lado.

Medición del lado: L=10 cm.

Error en la medición del lado: dL = 0.1 cm.

Derivada del área con respecto al lado: A ' (L) = 2 L.

Calculamos la diferencial del área (dA):

dA = A ' (L) dL

dA=(2(10)(0.1)

$dA\ (L) = 2cm^2$

Interpretación: Si mides el lado con un error de ± 0.1 cm, el área calculada de 100 cm^2 podría tener un error aproximado de ± 2 cm^2. Esto significa que el área real podría estar entre 98 cm^2 y 102 cm^2.

Estimaciones

Las diferenciales nos permiten hacer estimaciones rápidas de cómo un pequeño cambio en una entrada afectará una salida, sin tener que recalcular toda la función. Es esencialmente la misma idea que las aproximaciones, pero enfocada en la "estimación del cambio" en lugar del "nuevo valor".

Ejemplo:

Un ingeniero estima que el consumo de gasolina de un coche (C) en litros por cada 100 km se relaciona con la velocidad (v) en km/h mediante una función C(v). Si a 80 km/h el consumo es de 8 L/100 km, y la tasa de cambio del consumo con respecto a la velocidad (C'(v)) a 80 km/h es de 0.05 L/(100km), ¿cuánto aumentaría el consumo si la velocidad aumenta en 2km/h?

Función: C(v)

Velocidad actual: v=80 km/h.

Consumo actual: C (80) = 8 L/100 km.

Tasa de cambio (derivada): C ' (80) = 0.05.

Cambio en la velocidad: dv = 2 km/h.

Estimación del cambio en el consumo (dC):

dC = C ' (v) dv

dC = (0.05)(2)

dC = 0.1 L/100km

- **Interpretación:** Si la velocidad aumenta en 2 km / h desde los 80 km / h, el consumo de gasolina se estima que aumentará en 0.1 L/100km. El nuevo consumo estimado sería 8 + 0.1 = 8.1 L / 100 km.

En resumen, la diferencial es una herramienta poderosa que, al usar la información de la derivada (la pendiente de la tangente), nos permite hacer estimaciones y entender la propagación de errores cuando estamos lidiando con pequeños cambios en las variables. Es una forma de "linearizar" el problema alrededor de un punto, facilitando los cálculos

Ejemplo 2:

Se mide el radio de una esfera y se encuentra que es de 10 cm con un posible error en la medición de ±0.1 cm. Usa diferenciales para estimar el error máximo en el cálculo del volumen de la esfera. (Fórmula del volumen: $V=\frac{4}{3}\pi r^3$).

1. Identificar la fórmula del volumen y los datos proporcionados:

- Fórmula del volumen de una esfera: $V=\frac{4}{3}\pi r^3$
- Radio medido: r = 10 cm
- Error posible en la medición del radio: dr = ± 0.1 cm

2. Calcular la diferencial del volumen (dV):

La diferencial de una función se usa para estimar el cambio en la función cuando su variable independiente cambia. En este caso, queremos estimar el cambio en el volumen (dV) debido a un pequeño cambio en el radio (dr).

Deriva la fórmula del volumen con respecto a r:

$\frac{dr}{dV} = \frac{d}{dx}(\frac{4}{3}\pi r^3)$

$\frac{dr}{dV} = \frac{4}{3}\pi\,(3r^2)$

$\frac{dr}{dV} = 4\pi r^2$

Ahora, para obtener la diferencial del volumen (dV), multiplica la derivada por dr:

$dv = (4\pi r^2)dr$

3. Sustituir los valores conocidos en la expresión de dV:

- r = 10 cm

- dr = 0.1 cm

dV = 4π $(10\ \text{cm})^2$ (0.1 cm)

dV = 4π (100cm^2) (0.1 cm)

dV = 400π (0.1 cm^3)

Dv = ± 40π cm^3

4. Concluir el error máximo en el cálculo del volumen:

El error máximo estimado en el cálculo del volumen de la esfera es de ± 40π cm^3.

Si necesitas un valor numérico aproximado: 40π ≈ 40 × 3.14159 ≈ 125.66 cm^3

Por lo tanto, el error máximo en el cálculo del volumen de la esfera es de aproximadamente ± 125.66 cm^3.

POR UNA EDUCACIÓN QUE GENERA CAMBIO

En los siguientes videos se muestra el concepto de la diferencial y ejercicios de su aplicación.

https://youtu.be/dq8zOO87Urs?si=730O991yUE3jpC2W

https://youtu.be/anLOFNQUdB8?si=weUBakXZ3MzzuBRt

Reforzamiento

Progresión 7 y Progresión 8

Problemario

Instrucciones: Resuelve los siguientes ejercicios. Asegúrate de mostrar tus procedimientos y revisar tus respuestas antes de entregar.

1.- Usando diferenciales, aproxima el valor de $\sqrt{16.5}$.

A. 4.0625

B. 4.1

C. 4.05

D. 4.125

2- Se mide el radio de una esfera y se encuentra que es de 10 cm con un posible error en la medición de ±0.1 cm. Usa diferenciales para estimar el error máximo en el cálculo del volumen de la esfera. (Fórmula del volumen: V= $\frac{4}{3}\pi r^3$)

A. 4π cm^3

B. 100π cm^3

C. 0.4π cm^3

D. 40π cm^3

3.- Aproxima el valor de la función f(x)= x^3-2x^2+5 en x=2.01.

A. 5

B. 5.04

C. 5.01

D. 5.1

POR UNA EDUCACIÓN QUE GENERA CAMBIO

4.- El radio de un círculo se mide como 8 cm con un error de ±0.05 cm. Calcula el error porcentual aproximado en el área del círculo. (Área: $A=\pi r^2$)

A. 1.25%

B. 2.5%

C. 0.625%

D. 5%

5.- Estima el cambio en la función f(x)=ln(x) cuando x cambia de e a e+0.1.

A. e

B. 0.1

C. $\frac{0,1}{e}$

D. ln (0.1)

TPV1-SA2-EP02 Cuestionario PLANEA

Nombre_____. Grupo_____.

Instrucciones: Selecciona la respuesta correcta.

1. ¿Cuál no es una condición del Teorema de Rolle?

a) $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado [a, b]
b) $f(x)$ es diferenciable en el intervalo abierto (a, b)
c) $f(a) = f(b)$
d) $f(a) \neq f(b)$

2. Según el Teorema de Rolle, ¿cuánto vale la derivada de la función f(x) para el valor crítico c?

a) $-\infty$
b) 0
c) 1
d) $+\infty$

3. ¿En qué tipo de función se puede aplicar siempre el Teorema del Valor Medio en cualquier intervalo cerrado [a,b] dentro de su dominio?

a) Función escalonada
b) Función racional con asíntotas
c) Función polinómica
d) Función valor absoluto

4. ¿Qué debe hacerse cuando se deriva un término que contiene y, como en y^2, al aplicar la derivación implícita?

e) Se deriva como si fuera una constante
f) Se deriva como $2y$ solamente
g) Se deriva como $2y \cdot \frac{dy}{dx}$
h) Se ignora porque y no depende de x

5. ¿Cuál es la derivada de la función implícita $x + y^2 = 5$?

a) $2y$
b) $1 + 2y$
c) $5/y$
d) $-1/2y$

6. ¿Cuál es la cuarta derivada de y = sin x ?

a) y^{IV} = sin x
b) y^{IV} = cos x
c) y^{IV} = – sin x
d) y^{IV} = –cos x

POR UNA EDUCACIÓN QUE GENERA CAMBIO

TPV1-SA2-LC02 Lista de Cotejo

Portafolio de Evidencias de las Actividades de Reforzamiento

Instrumento de evaluación

Datos Generales			
Nombre de los estudiantes		**Matricula**	
Producto esperado	PORTAFOLIO DE EVIDENCIAS	**Fecha**	
Nombre del docente		**Firma del docente**	

	CRITERIOS	%	CUMPLE		Puntaje
			SI	NO	
1.	Presentar el portafolio en la fecha y hora establecidas, mostrando puntualidad y responsabilidad.	**10**			
2.	Incluye una portada que contenga todos los datos de identificación relevantes, tales como número de plantel, semestre, grupo, bloque, nombre completo, nombre de la Unidad de Aprendizaje Curricular (UAC) y del docente, además de especificar claramente el objetivo de la UAC, la fecha y el lugar.	**10**			
3.	Presentar una estructura organizada y ordenada de acuerdo con las indicaciones proporcionadas por el docente.	**10**			
4.	Las actividades incluidas en el portafolio son originales y reflejen el esfuerzo del estudiante, además están presentadas con limpieza y claridad lo que facilita su comprensión.	**20**			
5.	Contiene todos los trabajos solicitados por el docente, sin omitir ninguno.	**20**			
6.	Cada trabajo incluido en el portafolio está calificado por el docente y cuenta con su sello o firma, lo que certifica la evaluación realizada.	**30**			
				Calificación	
Aspectos para mejorar:					

POR UNA EDUCACIÓN QUE GENERA CAMBIO

TPV1-SA2-MA02 Mapa de Aprendizajes

Para evaluar las progresiones:

5, 6, 7 y 8

UAC:	Taller de Pensamiento Variacional I	**Progresiones**	5.6,7 y 8	**Fecha:**	
Nombre				**Grupo y turno**	

Situación de aprendizaje 2: Choco de corazón, máximo ingeniero de profesión

Mapa de aprendizaje

1: Necesito ayuda *2: Puedo hacerlo solo* *3: Puedo ayudar a otros*

Progresión de Aprendizaje	**Nivel**			**Que debo hacer para mejorar:**
	1	**2**	**3**	
Progresión 5: Analiza el Teorema de valor medio y Teorema de Rolle, así como su utilidad en el planteamiento y solución a problemas de la vida cotidiana o del entorno que le rodea de manera que el estudiantado analice, compruebe e interprete sus hallazgos y resultados.				
Progresión 6: Aplica procedimientos algorítmicos para derivar funciones implícitas y de orden superior, así como el uso de estas últimas para resolver límites indeterminados utilizando la regla de L'Hopital aplicando estas herramientas en la solución de problemas de las ciencias				
Progresión 7: Aplica y/o construye modelos para encontrar la solución de situaciones-problema de su contexto, usando la derivada como una herramienta que le permite interpretar y explicar fenómenos de variación estudiados por las ciencias considerando herramientas analíticas y/o tecnológicas en la modelación.				
Progresión8: Construye modelos matemáticos, identificando las variables que se relacionan entre sí, obteniendo de manera intuitiva la diferencial como una herramienta para darle solución a problemas de las ciencias que le permita obtener información y analizar los resultados para la toma de decisiones.				

Nombre y Firma del estudiante:	**Firma del Facilitador**

POR UNA EDUCACIÓN QUE GENERA CAMBIO

Referencias Bibliográficas Progresión 5 y Progresión 6

Ayres, F. (2013). *Cálculo*. McGraw-Hill. ISBN: 9781456203276.

Ayres, F., & Mendelson, E. (1991) *Cálculo Diferencial e Integral*, Tercera Edición, Editorial McGraw-Hill pp 100-102

CONAMAT. (2009). *Matemáticas simplificadas*. Pearson Educación. ISBN: 9786074423488.

Dirección General del Bachillerato. (2025). *Taller de pensamiento variacional I* [Programa oficial]. Secretaría de Educación Pública. https://dgb.sep.gob.mx/storage/recursos/2025/04/RSy6bF9KMO-Taller_de_Pensamiento_Variacional_I.pdf

División de Ciencias Básicas, Colegio de Bachilleres de Tabasco. (s.f.). ***Cuaderno*** *de ejercicios de cálculo diferencial*.

Granville, W. A. (1997). *Cálculo diferencial e integral*. Limusa Noriega Editores. ISBN: 968181178X.

Jones, P. (2011). *Calculus 1001 practice problems for dummies*. Wiley Publishing.

Leithold, L. (1994). *El cálculo*. Oxford University Press. ISBN: 9706131825.

Pimiento Jiménez, J. (s.f.). *Estrategias para el desarrollo del pensamiento lógico-matemático en la EMS*. Preparatoria Regional de Jocotepec, Universidad de Guadalajara. http://prepajocotepec.sems.udg.mx/sites/default/files/estrategias_pimiento_0.pdf

Stewart, J. (2006*)* *Cálculo Conceptos y Contextos*, Tercera Edición, Editorial Thomson, pp 232-236.

Stewart, J. (2018). *Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas*. Cengage Learning México. ISBN: 9786075265505.

Swokowski, E. W. (2009). *Calculus: The classic edition* (5ª ed.). Brooks/Cole.

Tarasov, M., & Day, A. (2012). *Concepts in Calculus I*. OpenStax College.

Himno

Al COBATAB

¡Oh!, Colegio de Bachilleres, impetuosa y querida

institución casa fiel del conocimiento,

hoy te canto este himno con amor,

eres rayo de esperanza del mañana,

eres la voz de la verdad.

¡Oh!, Colegio de Bachilleres, eres

luz en medio de la oscuridad.

//Colegio de bachilleres conducta

clara y firme decisión

Colegio de bachilleres tu misión

para siempre es ser mejor.//

En Tabasco se ha sembrado

la semilla que un día germinara,

el impulso de la vida modernista

en progreso de toda la sociedad,

es tu memorable historia gran

orgullo para toda la región,

educación que genera cambio,

ejemplo digno en cada generación.

Porra

Institucional

¡Somos!

¡Somos!

Jóvenes Bachilleres

Jóvenes Bachilleres

Con Valor y Lealtad

De Norte a Sur

De Este a Oeste

Somos líderes Bachilleres del Sureste

COBATAB Unido, COBATAB Fortalecido.

Este encuentro lo gano porque lo gano

Como dijo el Peje, me canso ganso.

¡Somos!

¡Somos!

Jóvenes Bachilleres

Jóvenes Bachilleres

¡Somos!

¡Somos!

Jóvenes Bachilleres

Jóvenes Bachilleres

COBATAB Unido, COBATAB Fortalecido

Cobachito

El Manatí

Mascota institucional

Colegio de Bachilleres,
Está de fiesta señores
Pues todos sus estudiantes
Hoy celebran con honores.

Que ya llegó la alegría
Es hora de motivar
Bailemos con algarabía
Cobachito nos guiará.

Allá por el acahual
En los ríos de Tabasco
Aconchado en unas ramas
O nadando sin parar.

Un manatí se ha ganado
El cariño de la gente
Cobachito le han llamado
Y no para de bailar.

Cobachito, con él vamos a ganar
Cobachito, eres espectacular
Cobachito, respetamos tu hábitat
Cobachito, mascota del COBATAB.

Mientras la orquesta se escucha
Y la porra se emociona
Los jóvenes bachilleres
A una voz ovacionan.

Con orgullo representan
A una gran institución
COBATAB está presente
Y Cobachito ya llegó.

MISION

Somos una organización educativa capaz, eficiente, responsable, con valores y comprometida con el modelo de la Nueva Escuela Mexicana y un trabajo de territorio permanente, formando estudiantes con responsabilidad social y alto nivel académico.

VISION

Ser el mejor subsistema de educación media superior del Estado de Tabasco y del país, con un bachillerato sustentado en valores, inclusión, humanismo, excelente nivel educativo, y el trabajo colegiado de quienes formamos la comunidad del Colegio de Bachilleres de Tabasco.

VALORES

Educar con valores, significa identificar espacios para que los estudiantes desarrollen de manera racional, ética y autónoma sus principios, los cuales les permitirán mantener una adecuada relación con los demás, desde una perspectiva al bien común.

Compromiso. Capacidad de las personas para tener conocimiento de la importancia de atender lo que se propone o se le encomienda, en el periodo concertado.

Disciplina. Entrenamiento que corrige, moldea, da fortaleza y perfecciona su misión, es formar buenos hábitos y establecer una serie de reglas personales que comprometan alcanzar un ideal.

Equidad. Implica justicia e igualdad de oportunidades entre hombres y mujeres respetando la pluralidad de la sociedad.

Gratitud. Expresa el deseo voluntario de correspondencia derivado de una acción, a través de las palabras o a través de un gesto.

Honestidad. Permite alcanzar el sentido de la vida humana, es la conciencia clara de lo que está bien o está mal, consiste en actuar apropiada y congruentemente entre los pensamientos y las acciones.

Humanidad. Respeto a la dignidad humana de sus iguales y de toda persona que conforma la sociedad, actuando en un marco de empatía, equidad e inclusión.

Justicia. Voluntad constante de dar a cada uno lo que es suyo.

Lealtad. Sinónimo de nobleza, rectitud, honradez, honestidad; permiten desarrollar relaciones sociales y/o de amistad en donde se creen un vínculo de confianza muy sólido, y respeto en los individuos.

Respeto. Esencia de las relaciones humanas, de la vida en comunidad, del trabajo en equipo, de la vida conyugal, de cualquier relación interpersonal. Es garantía de transparencia.

Responsabilidad. Sentido de compromiso presente en cada uno. Es hacerse cargo de las obligaciones, no dar excusas ni culpar a los demás, saber medir las consecuencias antes de actuar, para ser cumplidos y confiables.

Solidaridad. Condición del ser humano que complementa las actitudes sociales de un individuo.

Tolerancia. Actitud mediante la cual una persona tolera o acepta rasgos que no necesariamente tengan que ver con cuestiones raciales, étnicas o religiosas de otra persona que conoce.

Transparencia. Capacidad que tiene un ser humano para que los otros entiendan claramente sus motivaciones, intenciones y objetivos respeto a algún tema o suceso.

TABASCO
GOBIERNO DEL PUEBLO

EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN

COBATAB
COLEGIO DE BACHILLERES DE TABASCO

GUÍA DE ESTUDIANTES

Estimada comunidad estudiantil del Colegio de Bachilleres de Tabasco: Reciban un cordial saludo. Como Director General, me complace dirigirme a ustedes a través de esta guía de estudios, una herramienta diseñada para acompañarlos en su formación académica y personal.

En esta etapa de su vida, el aprendizaje autónomo es clave para descubrir sus talentos, fortalecer sus habilidades y construir un futuro con propósito. Cada actividad, cada lectura y cada reto que encuentren en esta guía está pensado para impulsar su desarrollo integral.

Les invito a asumir con responsabilidad su proceso de aprendizaje, a colaborar con sus compañeros y a mantener siempre una actitud de respeto y apertura. En el Colegio de Bachilleres de Tabasco promovemos la equidad y creemos firmemente en el potencial de cada uno de ustedes.

Esta guía busca ser clara y accesible, con objetivos definidos y contenidos relevantes para su contexto. Les animo a aprovecharla al máximo, a preguntar, reflexionar y aplicar lo aprendido en su vida diaria.
Confío en su capacidad para superar desafíos, alcanzar metas y contribuir positivamente a su comunidad. Cuentan con el apoyo de sus docentes y de toda la institución.

Con entusiasmo y compromiso, sigamos construyendo juntos una educación de calidad y calidez, que genera cambio.

Con aprecio y confianza,

Fernando Yrys Hernández
Director General
Colegio de Bachilleres de Tabasco