

Guía didáctica de

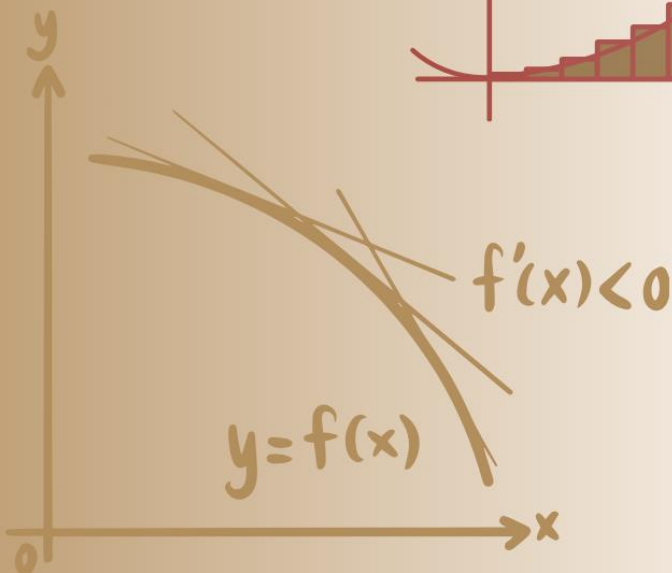
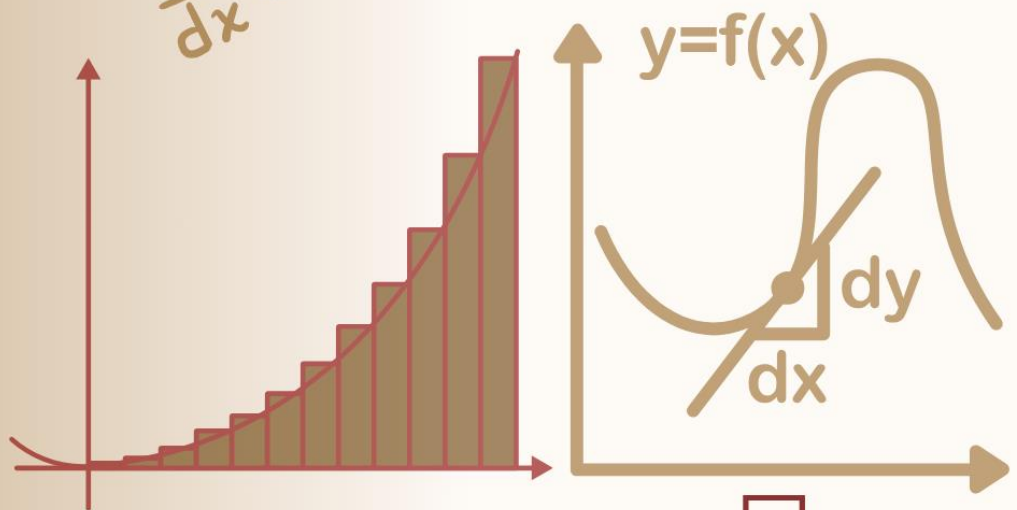
Pensamiento Matemático III

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

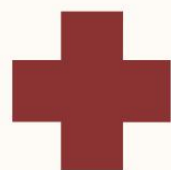
$$\frac{d}{dx}(5x) = 5$$

$$(4x^3)' = 12x^2$$

Δx



$$\frac{dy}{dx}$$



y'

Datos del alumno

Nombre completo: _____

Semestre y grupo: _____ Turno: _____

Plantel: _____

Contenido

DATOS DEL ALUMNO	6
<i>Progresiones de aprendizaje, metas, categorías y subcategorías</i>	12
<i>Ubicación de la UAC</i>	19
SITUACIÓN DE APRENDIZAJE 1	22
<i>Propósito de la SA 1</i>	23
APRENDIZAJES DE TRAYECTORIA	24
<i>Situación de Aprendizaje 1</i>	26
<i>Instrumento de Evaluación Situación de Aprendizaje 1</i>	27
<i>Evaluación Diagnóstica SA1</i>	29
PM3-SA1-LC01 Lista de cotejo para evaluar el Portafolio de Evidencias SA1 de las actividades de reforzamiento	32
<i>Progresión 1</i>	34
Aportaciones históricas al desarrollo del cálculo	34
Filosofía griega. (Enganche)	34
Método de Exhaución de Arquímedes.	35
Método de tangentes de Fermat.	36
Integración de Newton.	36
Conceptos primordiales	38
Cambio	38
Variación promedio.	38
Aplicaciones	41
Variación instantánea	41
Representación geométrica	42
Procesos infinitos	42
Movimiento	43
Elementos básicos (conceptos y representaciones graficas).	47
Punto, recta, secante, tangente y pendiente.	47
Problemáticas para determinar la pendiente de una recta tangente.	49
Progresión 3	55
¿Qué operaciones se pueden hacer con las funciones?	55
Suma de funciones	56
Resta de funciones	56
Multiplicación de funciones	57
División de funciones	57
Funciones reales de variable real	60

Modelos matemáticos	60
Modelos matemáticos en la sociedad	61
Modelos matemáticos en nuestro contexto	61
PM3-SA1-LC02 Tipo de instrumento para evaluar TAREA 01: "Infografía de funciones"	67
Progresión 4	68
Características de las graficas	68
Funciones lineales	68
Concepto de Continuidad:	68
Función creciente y decreciente	69
Funciones cuadráticas y cúbicas	69
Crecimiento y decrecimiento para la función cuadrática	69
Conceptos de máximos y mínimos	71
Concepto de Concavidades	71
Modelado de funciones y análisis de graficas.	77
Modelado de funciones	78
Modelado de funciones lineales	79
Modelado de funciones cuadráticas	81
Modelado de funciones cúbicas	82
Progresión 5	87
Limites	87
Progresión 6	102
Continuidad de una función	102
Los significados de la continuidad, las raíces y los límites dentro de una función real	106
Funciones continuas	106
Raíces	106
Ejemplo contextualizado:	108
Progresión 7	110
La derivada como razón de cambio	110
Razón de cambio	111
Razón de cambio de una función	114
Definición de la derivada como razón de cambio	116
Regla de los Cuatro Pasos	117
SA 1: Mi Laboratorio de matemáticas	122
CUESTIONARIO TIPO PLANEA SA 1	135
PM3-SA1-MA01 Mapa de aprendizaje para evaluar las progresiones de la SA 1	138
Referencias SA 1	139
SITUACIÓN DE APRENDIZAJE 2	141
Propósito de la SA 2	142

APRENDIZAJES DE TRAYECTORIA	143
Situación de Aprendizaje 2	145
Instrumento de Evaluación Situación de Aprendizaje 2	146
Evaluación Diagnóstica SA2	148
PM3-SA2-LC01 Lista de cotejo para evaluar el Portafolio de Evidencias SA2 de las actividades de reforzamiento	150
Progresión 8	152
Derivadas de funciones algebraicas:	154
Encontrar de forma heurística algunas reglas de derivación	155
Derivación de la función constante.	155
Derivación de la función identidad.	155
Derivación de una suma de funciones.	156
Reglas de derivación:	157
Suma y diferencia algebraica	157
Producto	158
Cociente de dos funciones	159
Regla de la cadena	160
Progresión 9	162
Razón de cambio instantánea	162
Ejemplos de su aplicación en diferentes ciencias.	162
Progresión 10	169
Criterio de la primera derivada	169
FUNCION CRECIENTE Y DECRECIENTE, MAXIMOS Y MINIMOS	171
Criterio de la segunda derivada	174
FUNCION CÓNCAVA Y CONVEXA, MAXIMOS Y MINIMOS	174
Progresión 11	185
Problemas de optimización	190
Progresión 12	194
Funciones exponenciales y logarítmicas	194
Función exponencial	195
Propiedades de la función exponencial	195
Aplicaciones de la función exponencial	196
Función logarítmica	197
Propiedades de la función logarítmica	197
Aplicaciones de la función logarítmica	198
Propiedades de los exponentes	199
Propiedades de los logaritmos	200
PM3-SA2-LC02 Tipo de instrumento para evaluar TAREA 02: "Tabla comparativa"	202

Ejemplos de aplicación: _____	203
Relación entre la función exponencial y la función logarítmica _____	204
Progresión 13 _____	207
Uso de funciones senooidales y cosenoidales en la modelación y graficación (movimiento ondulatorio y oscilatorio). _____	207
Función seno y función coseno. _____	208
Gráfica de Seno _____	209
Gráfica de Coseno _____	210
Propiedades de la función seno y función coseno. _____	211
Progresión 14 _____	214
El Modelo Presa-Depredador de Lotka-Volterra _____	214
Ecuación de las Presas (Conejos) _____	215
Ecuación de los depredadores (zorros) _____	215
La segunda ley de Newton como ecuación que involucra derivadas _____	217
Modelo de crecimiento bacteriano _____	218
Modelo matemático del decaimiento radiactivo (ley de la desintegración radiactiva) _____	219
Progresión 15 _____	221
El cambio acumulado y el área bajo una curva y estudio de la distribución normal ____	221
ÁREA BAJO LA CURVA _____	221
CUESTIONARIO TIPO PLANEA SA 2 _____	228
PM3-SA2-MA02 Mapa de aprendizaje para evaluar las progresiones de la SA 2 ____	230
Referencias SA 2 _____	231
HIMNO COLEGIO _____	233
PORRA INSTITUCIONAL _____	234
COBACHITO _____	235



Haz clic sobre mí, te
enlazaré a la página de
COBATAB para que
descargues todas tus guías y
consultes lo necesario para
este nuevo inicio.
¡ÉXITO!



TABASCO

"Educación que genera cambio"



COBATAB
COLEGIO DE BACHILLERES
DE TABASCO

Pensamiento Matemático III

DATOS DEL ALUMNO

Nombre: _____ Plantel: _____

3er Semestre Grupo: _____ Turno: _____

No olvides tus clases de Pensamiento Matemático III, anota para tener presente, ¡MUCHO ÉXITO!

Clases en el día	LUNES	MARTES	MIÉRCOLES	JUEVES	VIERNES
1ª Clase					
2ª Clase					
3ª Clase					
4ª Clase					
5ª Clase					
6ª Clase					
7ª Clase					

Cobanota:



IMPORTANTE:



Directorio de COLEGIO DE BACHILLERES DE TABASCO

MTRO. ERASMO MARTÍNEZ RODRÍGUEZ

Director General

Mtra. SONIA LÓPEZ IZQUIERDO

Directora Académica

DRA. GISELLE OLIVARES MORALES

Subdirectora de Planeación Académica

MTRA. ALEJANDRINA LASTRA COLORADO

Jefe del Departamento de Programas de Estudio

UAC: **PENSAMIENTO MATEMÁTICO III**

Edición: 2024

En la realización del presente material, participaron:

Asesor Académico: LORENZO MENDOZA GÓMEZ P-05

Participantes

DOCENTE			CENTRO
Abisai	Carrillo	Zentella	Plantel 32
Abraham de Jesús	Corona	Maldonado	Plantel 2
Adriana	Reyes	Ramos	Plantel 42
Adriana	Soberano	Morales	EMSaD 2
Aldri	Ocaña	Cruz	Plantel 22
Alejandro	Campos	Martínez	Plantel 41
Alexander	Martínez	Hernández	Plantel 11
Antonio	López	Hernández	Plantel 37
Araceli	Chablé	Hernández	Plantel 33
Aversain	Juárez	Custodio	Plantel 2
Beatriz Estefanía	Salado	Hernández	Plantel 8
Carlos Manuel	Cabrera	Chablé	Plantel 32
Diana Beatriz	Aguilar	Domínguez	Plantel 3
Elizabeth	Ramón	Recino	Plantel 9
Enny Dolores	Morales	López	Plantel 22
Erika Yuridia	Flores	Chan	Plantel 47
Gabriel	Ulín	Martínez	Plantel 5

Gerardo	Jiménez	Pérez	Plantel 30
Hernán	Gómez	Rodríguez	Plantel 29
Irma Graciella	del Prado	Piña	Plantel 28
Javier	Molina	Morales	EMSaD 59
Javier Antonio	Pérez	Alvarado	Plantel 22
Jesús Alejandro	García	Reyes	Plantel 13
Jesús del Carmen	Chablé	Cupil	EMSaD 55
Jesús Enrique *	Garcés	Rodríguez	Plantel 28
Joana Gisel	Pérez	Magaña	EMSaD 26
José de Jesús	Winzig	Vázquez	Plantel 4
Juan Alberto	Jiménez	Hernández	Plantel 5
Juana	Chablé	de la Cruz	Plantel 6
Juana Antonia	Moo	Salvador	Plantel 4
Liliana del Carmen	Aguilar	Yedra	Plantel 2
Kevin Ramón *	Bravo	Escolástico	Plantel 2
Luis Felipe *	Córdova	Carrasco	Plantel 6
Luis Miguel	Ruiz	Rodríguez	Plantel 2
Manolo	Martínez	Fajardo	Plantel 35
Manuel Alejandro	Álvarez	Sánchez	Plantel 28
Manuel Humberto	Yzquierdo	Ruiz	Plantel 42
Marcela	Mendoza	Sánchez	Plantel 28
Marcos Alberto	Landero	de la Cruz	Plantel 2
María América	Arias	Hernández	Plantel 35
Marilyn Jannet	Ramón	Vértiz	Plantel 21
Mario Arley	Vidal	Gerónimo	Plantel 3
Mireya	Díaz	Hidalgo	Plantel 22
Moisés *	Jiménez	Jiménez	Plantel 1
Nancy	Arias	Chablé	Plantel 4
Ramón Augusto *	Escobar	Priego	Plantel 5
Román	Vicente	Hernández	Plantel 2
Román Antonio *	Chablé	Olán	Plantel 30
Rosa Isela	Cabello	Barrosa	Plantel 7
Seydi Guadalupe *	de la O	Colomé	Plantel 21
Sonia Iris *	Castillo	Hernández	Plantel 6
Tomás	Velázquez	Reyes	Plantel 3
Yahaira Esther	García	Torres	Plantel 5

Asesor de equipo *

Este material fue elaborado bajo la coordinación y supervisión del Departamento de Programas de Estudio de la Dirección Académica del Colegio de Bachilleres del Estado de Tabasco, concluyendo su edición en el mes de junio del año 2024.

@ Derechos en proceso de registro.

Queda prohibida la reproducción total o parcial de este material por cualquier medio electrónico o mecánico, para fines ajenos a los establecidos por el COBATAB.

Para uso de la Comunidad del Colegio de Bachilleres de Tabasco (COBATAB)

www.cobatab.edu.mx



Moderador: **DR. REYLE MAR SARAO**
Jefe de materia

Presentación

La Dirección General del Colegio de Bachilleres de Tabasco siguiendo las orientaciones pedagógicas de la NEM, a través de la participación de docentes del área de matemáticas adscritos a diferentes planteles, valorando la experiencia de la enseñanza dentro de ese campo disciplinar, ha desarrollado la presente guía didáctica en correspondencia a **la UAC de Pensamiento matemático III. Pretende que los estudiantes de nuestro COBATAB posean claridad en el desarrollo del pensamiento variacional para lograr la comprensión de fenómenos naturales, sociales, biológicos e incluso médicos.**

En ella se señalan los aspectos curriculares propios de la UAC, como son las progresiones que lo conforman, los aprendizajes de trayectoria a las cuales aportan, las categorías que guían el desarrollo y las subcategorías que establecen sus elementos transversales y como se distribuyeron para generar bloques de progresiones relacionados y fundamentados.

De acuerdo con los bloques de progresiones conformados desde la experiencia docente, los aprendizajes de trayectoria y el enunciado de cada progresión individual, se desarrolló un andamiaje temático, el cual se articula en cada bloque por medio de una situación de aprendizaje (SA) en la que intervienen los contenidos temáticos como guía para resolver una problemática contextualizada. Para el desarrollo de la UAC Pensamiento matemático III se han establecido 2 bloques de progresiones, con sus correspondientes situaciones de aprendizajes, acompañadas de sus instrumentos de evaluación, fundamentados en las metas de aprendizaje de cada progresión, para contribuir al desarrollo de los aprendizajes de trayectoria de este recurso sociocognitivo.

La NEM propone la enseñanza del pensamiento matemático a través de la intuición y métodos heurísticos que tiendan a formalizarse progresivamente y empleando metodologías activas se trabaje en el MCCEMS el desarrollo del pensamiento matemático de las y los estudiantes. Por ello **esta guía propone también, 1 tarea evaluable y 8 actividades de acompañamiento por cada situación de aprendizaje** a lo largo del semestre como parte del desarrollo de un proceso formativo de asimilación de conceptos y habilidades, dichas tareas también **están acompañadas con su respectivo instrumento de evaluación.** Es importante mencionar que las tareas y actividades de acompañamiento establecidas para cada bloque son parte esencial del proceso de enseñanza aprendizaje, y se da la oportunidad que cada docente modifique el enfoque de acuerdo con su contexto, pero cuidando siempre que se aborden y evalúen las metas de aprendizaje, para dar paso a la presentación, socialización y evaluación del producto que brinde la solución a la situación de aprendizaje. **Debido a lo fundamental que representa el cumplimiento de ellas** para el logro de la resolución de las SA **y dado el ajuste de calendario a 14 semanas,** se recomienda que de **acuerdo**

con sus habilidades didácticas y según su contexto adapte la entrega establecida en la dosificación, de tal modo que permita que los estudiantes alcancen las metas y aprendizajes establecidos en ellas.

En el modelo de planeación didáctica se proponen los tipos de evaluaciones en las diversas tareas y situaciones de aprendizaje, pero el docente tiene la libertad de elegir entre autoevaluar, coevaluar y/o heteroevaluar de acuerdo con los momentos del proceso de enseñanza-aprendizaje y del contexto de su grupo(s), lo importante es ejercer la práctica de evaluar; pues fortalece el proceso socio formativo en el aprendizaje de los estudiantes. **Al final** de cada sección que abarca **cada bloque de progresiones**, sus respectivas situaciones de aprendizaje, tareas y actividades de acompañamiento **se incluye un mapa de aprendizaje**; esto para realizar una autoevaluación que permite a cada estudiante y al docente mismo conocer el nivel de logro en los aprendizajes de trayectoria establecidos para concientizar su progreso en su ruta de desarrollo educativo. Por último, no puede omitirse señalar que para facilitar el desarrollo de estrategias de trabajo en algunos contenidos en el aula y fuera de ella, se insertan códigos QR e imágenes con sus respectivo enlace o dirección electrónica, dándole la versatilidad que se requiere para el desarrollo del aprendizaje autónomo en las horas de estudio independiente.

Este trabajo está alineado al Modelo de Planeación Didáctica de la Unidad de Aprendizaje Curricular de Pensamiento Matemático III, en el que de acuerdo con sus habilidades cada docente puede realizar las adaptaciones necesarias (en las evaluaciones diagnósticas, tareas, actividades de acompañamiento y cuestionarios tipo PLANEA) de acuerdo con su contexto escolar y de grupos, mediante la fundamentación de las adaptaciones en aras de un mejor aprendizaje para sus grupos.

Como complemento podrás encontrar en el siguiente sitio el conjunto de los documentos rectores del nuevo Marco Curricular Común de la Educación Media Superior de la Nueva Escuela Mexicana: <https://educacionmediasuperior.sep.gob.mx/propuestaMCCEMS>

Así mismo, los docentes que participaron en la elaboración de esta guía ponen a su disposición diversos recursos que esperamos faciliten el proceso de transición hacia el modelo educativo de la NEM y fortalezcan el desarrollo de su tarea educativa en esta Unidad de Aprendizaje Curricular.

ATENTAMENTE

Docentes Participantes

Fundamentación

En el desarrollo de las políticas públicas en materia de educación en nuestro país se emite el acuerdo número 17/08/22 por el que se implementa y regula el nuevo Marco Curricular Común de la Educación Media Superior (MCCEMS) de la Nueva Escuela Mexicana (NEM), el cual Tiene como propósito principal desarrollar una base de habilidades, de conocimientos y de cultura para adolescentes y jóvenes, que les permita aprender a aprender de por vida. El Pensamiento Matemático se incluye dentro del nuevo Marco Curricular Común de la Educación Media Superior como un recurso sociocognitivo, con la finalidad de lograr una formación humana e integral para todas y todos los jóvenes de México. Se concibe de manera amplia: la matemática deja de ser únicamente un conjunto de algoritmos que muchas veces son aplicados de manera mecánica y descontextualizada, para convertirse en un medio a través del cual el estudiantado pueda trabajar en la adquisición y mejoramiento de habilidades y destrezas del pensamiento tales como observar, intuir, conjeturar, argumentar, la capacidad para modelar y entender, a través del lenguaje matemático, algunos fenómenos sociales, naturales e incluso de su vida personal.

El recurso de pensamiento matemático se encuentra articulada en 3 Unidades de Aprendizaje Curricular (UAC) que se consideran como la serie o conjunto de aprendizajes que integran una unidad completa que tiene valor curricular porque ha sido objeto de un proceso de evaluación, acreditación y/o certificación. Estas UAC son las siguientes: Pensamiento matemático 1, la cual se aborda en primer semestre e incluye progresiones que se relacionan con el pensamiento probabilístico y estadístico, Pensamiento matemático 2, la cual se aborda en segundo semestre y aborda progresiones correspondientes al pensamiento aritmético, algebraico y geométrico, por último, **Pensamiento matemático 3**, la cual se aborda en el tercer semestre y **aborda progresiones correspondientes a algunos elementos del pensamiento variacional.**



Progresiones de aprendizaje, metas, categorías y subcategorías

1

Genera intuición sobre conceptos como variación promedio, variación instantánea, procesos infinitos y movimiento a través de la revisión de las contribuciones que desde la filosofía y la matemática hicieron algunas y algunos personajes históricos en la construcción de ideas centrales para el origen del cálculo.

METAS	CATEGORÍAS	SUBCATEGORÍAS
M1 Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.	C2 Procesos de intuición y razonamiento.	S1 Capacidad para observar y conjeturar.

2

Analiza de manera intuitiva algunos de los problemas que dieron origen al cálculo diferencial, en particular el problema de determinar la recta tangente a una curva en un punto dado

METAS	CATEGORÍAS	SUBCATEGORÍAS
M3 Aplica procedimientos, técnicas y lenguaje matemático para la solución de problemas propios del Pensamiento Matemático, de Áreas de Conocimiento, Recursos Sociocognitivos, Recursos Socioemocionales y de su entorno.	C3 Solución de problemas y modelación.	S3 Estrategias heurísticas y ejecución de procedimientos no rutinarios.
M1 Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.	C4 Interacción y lenguaje matemático	S1 Negociación de significados.

3

Revisa situaciones y fenómenos donde el cambio es parte central en su estudio, con la finalidad de modelarlos aplicando algunos conocimientos básicos de funciones reales de variable real y las operaciones básicas entre ellas

METAS	CATEGORÍAS	SUBCATEGORÍAS
M1 Construye un modelo matemático, identificando las variables de interés, con la finalidad de explicar una situación o fenómeno y/o resolver un problema tanto teórico como de su entorno.	C3 Solución de problemas y modelación.	S1 Uso de modelos.

4

Analiza la gráfica de funciones de variable real buscando simetrías, y revisa conceptos como continuidad, crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos relativos, concavidades, entre otros, resaltando la importancia de éstos en la modelación y el estudio matemático.

METAS	CATEGORÍAS	SUBCATEGORÍAS
M1 Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.	C3 Procesos de intuición y razonamiento.	S1 Capacidad para observar y conjeturar. S2 Pensamiento intuitivo.

5

Conceptualiza el límite de una función de variable real como una herramienta matemática que permite comprender el comportamiento local de la gráfica de una función.

METAS	CATEGORÍAS	SUBCATEGORÍAS
M1 Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno.	C1 Procedural	S1 Elementos variacionales.
M2 Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieren explicación o interpretación.	C2 Procesos de intuición y razonamiento.	S1 Capacidad para observar y conjeturar. S2 Pensamiento intuitivo. S3 Pensamiento formal.
M1 Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.	C4 Interacción y lenguaje matemático.	S1 Registro escrito, simbólico, algebraico e iconográfico. S2 Negociación de significados

6

Identifica y contextualiza la continuidad de funciones utilizadas en la modelación de situaciones y fenómenos y hace un estudio, utilizando el concepto de límite, de las implicaciones de la continuidad de una función tanto dentro del desarrollo matemático mismo, como de sus aplicaciones en la modelación.

METAS	CATEGORÍAS	SUBCATEGORÍAS
M1 Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.	C2 Procesos de intuición y razonamiento.	S1 Capacidad para observar y conjeturar. S2 Pensamiento intuitivo.
M2 Socializa con sus pares sus conjeturas, descubrimientos o procesos en la solución de un problema tanto teórico como de su entorno.	C2 Interacción y lenguaje matemático.	S3 Ambiente matemático de comunicación.

7

Interpreta, a partir de integrar diferentes perspectivas y métodos, el concepto central del cálculo diferencial, "la derivada", de forma intuitiva e intenta dar una definición formal, así como la búsqueda heurística para encontrar la derivada de la función constante, lineal y algunas funciones polinomiales.

METAS	CATEGORÍAS	SUBCATEGORÍAS
M2 Analiza los resultados obtenidos al aplicar procedimientos algorítmicos propios del Pensamiento Matemático en la resolución de problemáticas teóricas y de su contexto.	C1 Procedural.	S2 Elementos geométricos. S3 Elementos variacionales.
M2 Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieren explicación o interpretación.	C2 Procesos de intuición y razonamiento.	S1 Capacidad para observar y conjeturar. S2 Pensamiento intuitivo

Encuentra de manera heurística algunas reglas de derivación como la regla de la suma, la regla del producto, la regla del cociente y la regla de la cadena y las aplica en algunos ejemplos.

8

METAS	CATEGORÍAS	SUBCATEGORÍAS
M3 Compara hechos, opiniones o afirmaciones para organizarlos en formas lógicas útiles en la solución de problemas y explicación de situaciones y fenómenos.	C2 Procesos de intuición y razonamiento.	S1 Capacidad para observar y conjeturar. S2 Pensamiento intuitivo. S3 Pensamiento formal.
M4 Construye y plantea posibles soluciones a problemas de Áreas de Conocimiento, Recursos Sociocognitivos, Recursos Socioemocionales y de su entorno, empleando técnicas y lenguaje matemático.	C3 Solución de problemas y modelación.	S3 Estrategias heurísticas y ejecución de procedimientos no rutinarios.

Selecciona una problemática en la que el cambio sea un factor fundamental en su estudio para aplicar el concepto de la derivada como razón de cambio instantánea.

9

METAS	CATEGORÍAS	SUBCATEGORÍAS
M2 Construye un modelo matemático, identificando las variables de interés, con la finalidad de explicar una situación o fenómeno y/o	C2 Solución de problemas y modelación.	S2 Construcción de modelos.

10

resolver un problema tanto teórico como de su entorno.		
Explica y socializa el papel de la derivada para analizar una función (donde crece/decrece, máximo/mínimos locales, concavidades) y traza su gráfica.		
METAS	CATEGORÍAS	SUBCATEGORÍAS
M3 Comprueba los procedimientos usados en la resolución de problemas utilizando diversos métodos, empleando recursos tecnológicos o la interacción con sus pares.	C1 Procedural	S3 Elementos variacionales.
M4 Argumenta a favor o en contra de afirmaciones acerca de situaciones, fenómenos o problemas propios de la matemática, de las ciencias o de su contexto.	C2 Procesos de intuición y razonamiento	S1 Pensamiento formal.
M2 Socializa con sus pares sus conjeturas, descubrimientos o procesos en la solución de un problema tanto teórico como de su entorno.	C4 Interacción y lenguaje matemático.	S1 Registro escrito, simbólico, algebraico e iconográfico. S3 Ambiente matemático de comunicación.

11

Resuelve problemas de su entorno o de otras áreas del conocimiento empleando funciones y aplicando la derivada (e.g. problemas de optimización), organiza su procedimiento y lo somete a debate.		
METAS	CATEGORÍAS	SUBCATEGORÍAS
M4 Argumenta a favor o en contra de afirmaciones acerca de situaciones, fenómenos o problemas propios de la matemática, de las ciencias o de su contexto.	C2 Procesos de intuición y razonamiento.	S1 Capacidad para observar y conjeturar. S2 Pensamiento intuitivo. S3 Pensamiento formal.
M4 Construye y plantea posibles soluciones a problemas de Áreas de Conocimiento, Recursos Sociocognitivos, Recursos Socioemocionales y de su entorno, empleando técnicas y lenguaje matemático.	C3 Solución de problemas y modelación.	S2 Construcción de modelos. S3 Estrategias heurísticas y ejecución de procedimientos no rutinarios.
M2 Socializa con sus pares sus conjeturas, descubrimientos o	C4 Interacción y lenguaje matemático.	S3 Ambiente matemático de comunicación.

12

procesos en la solución de un problema tanto teórico como de su entorno.		
Examina la gráfica de funciones logarítmicas con diferentes bases y las gráficas de las funciones exponenciales para describirlas y realizar afirmaciones sobre el significado de que la función exponencial y logarítmicas de base "a" sean funciones inversas entre sí.		
METAS	CATEGORÍAS	SUBCATEGORÍAS
M3 Compara hechos, opiniones o afirmaciones para organizarlos en formas lógicas útiles en la solución de problemas y explicación de situaciones y fenómenos.	C2 Procesos de intuición y razonamiento.	S1 Capacidad para observar y conjeturar. S2 Pensamiento intuitivo. S3 Pensamiento formal.
M2 Construye un modelo matemático, identificando las variables de interés, con la finalidad de explicar una situación o fenómeno y/o resolver un problema tanto teórico como de su entorno.	C3 Solución de problemas y modelación.	S2 Construcción de modelos.

13

Analiza y describe un fenómeno en el que la periodicidad sea un constituyente fundamental a través del estudio de propiedades básicas funciones trigonométricas.		
METAS	CATEGORÍAS	SUBCATEGORÍAS
M2 Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieren explicación o interpretación.	C2 Procesos de intuición y razonamiento.	S1 Capacidad para observar y conjeturar. S2 Pensamiento intuitivo.
M2 Construye un modelo matemático, identificando las variables de interés, con la finalidad de explicar una situación o fenómeno y/o resolver un problema tanto teórico como de su entorno.	C3 Solución de problemas y modelación.	S2 Construcción de modelos.

14

Selecciona una problemática, situación o fenómeno tanto real como ficticio para modelarlo utilizando funciones derivables.		
METAS	CATEGORÍAS	SUBCATEGORÍAS
M4 Argumenta a favor o en contra de afirmaciones acerca de situaciones, fenómenos o problemas propios de la	C2 Procesos de intuición y razonamiento	S1 Capacidad para observar y conjeturar. S2 Pensamiento intuitivo. S3 Pensamiento formal.

matemática, de las ciencias o de su contexto.		
M2 Construye un modelo matemático, identificando las variables de interés, con la finalidad de explicar una situación o fenómeno y/o resolver un problema tanto teórico como de su entorno.	C3 Solución de problemas y modelación.	S1 Uso de modelo. S2 Construcción de modelos. S3 Estrategias heurísticas y ejecución de procedimientos no rutinarios.
M3 Organiza los procedimientos empleados en la solución de un problema a través de argumentos formales para someterlo a debate o a evaluación.	C4 Interacción y lenguaje matemático	S2 Negociación de significados. S3 Ambiente matemático de comunicación
Considera y revisa algunas ideas subyacentes al teorema fundamental del cálculo.		
METAS	CATEGORÍAS	SUBCATEGORÍAS
M4 Argumenta a favor o en contra de afirmaciones acerca de situaciones, fenómenos o problemas propios de la matemática, de las ciencias o de su contexto.	C2 Procesos de intuición y razonamiento	S1 Capacidad para observar y conjeturar. S2 Pensamiento intuitivo. S3 Pensamiento formal.

CONÓCENOS

COBATAB



Enfoque de la Unidad de Aprendizaje Curricular

En el programa de Pensamiento Matemático III se abordan 15 progresiones de aprendizaje que tienen impacto en el logro de las metas de aprendizaje clasificadas utilizando las cuatro categorías y empleando algunas de sus subcategorías. Las metas de aprendizaje de Pensamiento Matemático refieren a lo que se espera que el estudiantado aprenda durante la trayectoria de la UAC.

Cada progresión de aprendizaje articula los contenidos y habilidades del Pensamiento Matemático que deberán abordarse a lo largo del semestre y busca desarrollar en el estudiantado. Las categorías y subcategorías orientan la práctica docente hacia el favorecimiento de este tipo de pensamiento en las y los estudiantes. Cada progresión tiene asociada una o más metas de aprendizajes, las cuales no tienen por qué leerse como una camisa de fuerza sino como una sugerencia orientadora, por eje rector de una práctica exitosa se tiene que buscar un equilibrado trabajo en cada una de las cuatro categorías del pensamiento matemático a lo largo del semestre.

Las progresiones de aprendizaje de Pensamiento Matemático cuentan con anotaciones didácticas, las cuales son sugerencias para su abordaje. En el caso de Pensamiento Matemático III, de las anotaciones didácticas se deduce el enfoque adecuado para trabajar el pensamiento variacional. **Busca en los estudiantes** que, a través del estudio del análisis variacional trabajen en sus habilidades de observación, sus habilidades para conjeturar y argumentar, para lograr **la comprensión de fenómenos naturales, sociales, biológicos e incluso médicos** y así obtener una intuición educada además de capacidades discursivas que resultan fundamentales en diversos rubros profesionales y de la vida personal.

Ubicación de la UAC

1er Semestre	2do Semestre	3er Semestre	4to Semestre	5to Semestre	6to Semestre
Pensamiento Matemático I	Pensamiento Matemático II	Pensamiento Matemático III	Temas Selectos de Matemáticas I		Temas Selectos de Matemáticas I
La materia y sus interacciones	La conservación de la energía y su interacción	Ecosistemas: interacciones, energía y dinámica	Reacciones químicas: conservación de la materia en la formación de nuevas sustancias	La energía en los procesos de la vida diaria	Organismos: estructuras y procesos. Herencia y evolución biológica
Humanidades I	Humanidades II	Humanidades III	Espacio y sociedad		Componente de formación propedéutica
Inglés I	Inglés II	Inglés III	Inglés IV	Componente de formación propedéutica (Inglés V)	
Lengua y comunicación I	Lengua y comunicación II	Lengua y comunicación III		Componente de formación propedéutica	
Cultura digital Informática I	Cultura digital Informática II		Componente de formación propedéutica		
Ciencias sociales I	Ciencias sociales II			Conciencia histórica I	Conciencia histórica II
			Componente de formación propedéutica (Química, física, biología)	Componente de formación propedéutica (Geografía)	Componente de formación propedéutica (Ecología y medio ambiente)
			Conciencia histórica I: Perspectivas del mundo antiguo a la modernidad	Conciencia histórica II: El mundo moderno, el expansionismo	Conciencia histórica III: La realidad actual en perspectiva histórica
Recurso socioemocional					
		Módulo	Módulo	Módulo	Módulo

Recursos didácticos

Para dar respuesta a la pregunta ¿en qué recursos me apoyo para trabajar las progresiones de aprendizaje?, se sugiere el uso de simuladores, applets, programas de geometría dinámica, no sin olvidar que el uso de esta tecnología puede remplazarse cuando sea necesario con materiales más convencionales. Incluso, puede sacarse ventaja a los grupos numerosos para hacer simulaciones de eventos aleatorios de forma colaborativa.

En el abordaje de las progresiones de la unidad de aprendizaje, es importante recordar que los ambientes de aprendizaje pueden ser variados:

- a) Aula: virtual o física.
- b) Escuela: laboratorio, taller u otro.
- c) Comunidad: casa, localidad o región.

En el caso de Pensamiento Matemático III, se recomienda estudiar el análisis variacional a través de las propiedades geométricas y de mosaicos deductivos, en los cuales se asumen algunos resultados para poder continuar con el desarrollo deductivo, con la condición de que éstos puedan ser revisados con mayor detenimiento en una etapa posterior de aprendizaje

Instrumentos de evaluación

Con el fin de mostrar el saber que subyace en los aprendizajes de trayectoria y/o metas de aprendizaje permiten establecer una estrategia de evaluación, por tanto, contienen elementos observables que deben ser considerados en la evaluación tales como:

- La participación
- Las actividades generativas
- Las actividades de análisis

Para ello se consideran instrumentos que pueden agruparse principalmente en (Díaz-Barriga, 2014)

Técnicas de observación

- **Guía de observación:** Las técnicas de observación permiten evaluar los procesos de aprendizaje en el momento que se producen, La guía de observación es un instrumento

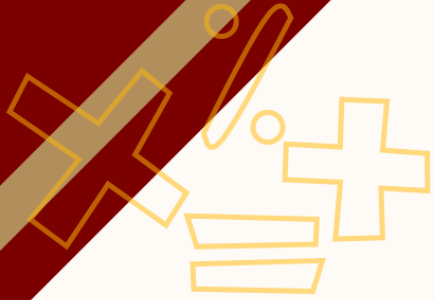
que se basa en una lista de indicadores que pueden redactarse ya sea como afirmaciones o bien como preguntas, que orientan el trabajo de observación dentro del aula, señalando los aspectos que son relevantes al observar. Esta guía puede utilizarse para observar las respuestas de los alumnos en una actividad, durante una semana de trabajo, una secuencia didáctica completa.

Técnicas para el análisis del desempeño

- **Rúbricas**: Son guías que describen las características específicas de lo que se pretende evaluar (productos, tareas, proyectos, exposiciones, entre otras) precisando los niveles de rendimiento que permiten evidenciar según las categorías y las metas de aprendizaje logradas en cada estudiante, valorar su ejecución y facilitar la retroalimentación.
- **Portafolios**: permiten mostrar el crecimiento gradual y los aprendizajes logrados con relación al programa de estudios, centrándose en la calidad o nivel de competencia alcanzado y no en una mera colección al azar de trabajos sin relación. Estos establecen criterios y estándares para elaborar diversos instrumentos para la evaluación del aprendizaje ponderando aspectos cualitativos de lo cuantitativo.
- **Listas de cotejo**: Es una lista de palabras, frases u oraciones que señalan con precisión las tareas, las acciones, los procesos y las actitudes que se desean evaluar

Los trabajos que pueden integrar en un portafolio y que pueden ser evaluados a través de rúbricas son: ensayos, videos, series de problemas resueltos, trabajos artísticos, trabajos colectivos, comentarios a lecturas realizadas, autorreflexiones, reportes de laboratorio, hojas de trabajo, guiones, entre otros, los cuales deben responder a una lógica de planeación o proyecto.

Con base a lo anterior, los programas de estudio de Dirección General del Bachillerato deben incluir elementos que enriquecen la labor formativa tales como la transversalidad, las habilidades socioemocionales y la interdisciplinariedad trabajadas de manera colegiada y permanentemente en el aula, consideran a la evaluación formativa como eje central al promover una reflexión sobre el progreso del desarrollo de sus aprendizajes de trayectoria.



SITUACIÓN DE APRENDIZAJE 1

Mi Laboratorio de Matemáticas

Propósito de la SA 1



PROGRESIONES

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

En equipos de cinco estudiantes, **elaborar un reporte de investigación de un experimento dado** (Caída libre, deslizamiento de un objeto por un plano inclinado, etc.), **donde modele de forma gráfica y analítica el movimiento de la partícula**, y **determine su función de razón de cambio, para posteriormente socializarlo en el aula clase.**

APRENDIZAJES DE TRAYECTORIA

- Valora la aplicación de procedimientos automáticos y algorítmicos, así como la interpretación de sus resultados, para anticipar, encontrar y validar soluciones a problemas matemáticos, de áreas del conocimiento y de su vida personal.
- Adopta procesos de razonamiento matemático tanto intuitivos como formales tales como observar, intuir, conjeturar y argumentar, para relacionar información y obtener conclusiones de problemas (matemáticos, de las ciencias naturales, experimentales y tecnología, sociales, humanidades, y de la vida cotidiana).
- Modela y propone soluciones a problemas tanto teóricos como de su entorno, empleando lenguaje y técnicas matemáticas.
- Explica el planteamiento de posibles soluciones a problemas y la descripción de situaciones en el contexto que les dio origen empleando lenguaje matemático y lo comunica a sus pares para analizar su pertinencia.

PROGRESIONES	Conocimientos (Conceptuales)
1. Genera intuición sobre conceptos como variación promedio, variación instantánea, procesos infinitos y movimiento a través de la revisión de las contribuciones que desde la filosofía y la matemática hicieron algunas y algunos personajes históricos en la construcción de ideas centrales para el origen del cálculo. (C2M1)	• Aportaciones históricas al desarrollo del cálculo: Filosofía griega, Método de Exhaustión de Arquímedes, Aproximación de tangentes de Fermat, Integración de Newton. • Conceptos primordiales: Cambio, variación promedio, variación instantánea, procesos finitos, movimiento.
2. Analiza de manera intuitiva algunos de los problemas que dieron origen al cálculo diferencial, en particular el problema de determinar la recta tangente a una curva en un punto dado. (C3M1, C4M1)	• Elementos básicos: punto, recta, secante, tangente, pendiente. • Problemas que le dieron origen al cálculo: determinar la recta tangente para velocidad instantánea y problemas de máximos y mínimos.
3. Revisa situaciones y fenómenos donde el cambio es parte central en su estudio, con la finalidad de modelarlos aplicando algunos conocimientos básicos de funciones reales de variable real y las operaciones básicas entre ellas. (C3M1)	• Operaciones con funciones: suma y resta, multiplicación y división. • Demostrar el uso de las funciones reales en problemas: Problema del movimiento, caída libre, crecimiento en función del tiempo.

4. Analiza la gráfica de funciones de variable real buscando simetrías, y revisa conceptos como continuidad, crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos relativos, concavidades, entre otros, resaltando la importancia de éstos en la modelación y el estudio matemático. (C3M1)	• Análisis de las características de las gráficas: funciones a trozo, concepto de continuidad. • Funciones lineales: concepto de crecimiento y decrecimiento. • Funciones cuadráticas y cúbicas: concepto de crecimiento y decrecimiento, concepto de máximos y mínimos, conceptos de concavidades. • Modelado gráfico de funciones: Lineales, cuadráticas y cúbicas. • Análisis de gráficas: Análisis de crecimiento y decrecimiento local, identificación de máximos y mínimos, identificación de concavidades.
5. Conceptualiza el límite de una función de variable real como una herramienta matemática que permite comprender el comportamiento local de la gráfica de una función. (C1M1, C2M2, C4M1)	• Análisis gráfico de los límites mediante una función a trozos. • Conceptualización de los límites: Aproximación a los límites de una función por la derecha y por la izquierda, tabulación de funciones en un intervalo de aproximación, gráfica de una función en el plano cartesiano.
6. Identifica y contextualiza la continuidad de funciones utilizadas en la modelación de situaciones y fenómenos y hace un estudio, utilizando el concepto de límite, de las implicaciones de la continuidad de una función tanto dentro del desarrollo matemático mismo, como de sus aplicaciones en la modelación. (C2M1, C4M2)	• Análisis de la continuidad de funciones contextualizadas. • Identificación de los significados de continuidad, las raíces y los límites dentro de una función real.
7. Interpreta, a partir de integrar diferentes perspectivas y métodos, el concepto central del cálculo diferencial, "la derivada", de forma intuitiva e intenta dar una definición formal, así como la búsqueda heurística para encontrar la derivada de la función constante, lineal y algunas funciones polinomiales. (C1M2, C2M2)	• La derivada como razón de cambio: pendiente. • Definición de la derivada: definición gráfica a partir de la transformación de una secante en una tangente, definición algebraica por el método de los 4 pasos.

Situación de Aprendizaje 1 (Para abordar en la sesión número 12)

Estrategia Didáctica:	Reporte de investigación
Título:	Mi Laboratorio de Matemáticas
Contexto:	Los estudiantes del COBATAB, con anterioridad determinaron que la energía total mecánica se conserva, y por lo tanto, eran capaces de determinar las velocidades iniciales y finales de los objetos en múltiples fenómenos. Sin embargo, durante el estudio de estos fenómenos solo eran capaces de determinar lo que ocurría con el movimiento de los objetos al principio y al final, y la parte intermedia no era estudiada, entonces, solicitaron la ayuda del profesor de Pensamiento matemático III para modelar el movimiento de los objetos en situaciones como: la caída libre, el deslizamiento de un objeto por un plano inclinado, entre otros fenómenos.
Conflicto cognitivo:	1. ¿Cuál es el gráfico que modela el movimiento de un objeto en la relación tiempo contra posición? 2. ¿Cuál es el modelo algebraico que del movimiento de un objeto mediante una función de posición respecto del tiempo? 3. ¿Cuál es el significado de la pendiente de la recta tangente a la curva que modela el movimiento de un objeto? 4. ¿Es posible determinar la velocidad instantánea de un objeto a los 0.2 segundos, a los 0.7 segundos y a los 1 segundos, después de ser soltada?

Instrumento de Evaluación Situación de Aprendizaje 1

PM3-SA1-RU01 Tipo de instrumento para evaluar la **Situación de Aprendizaje 1**

COLEGIO DE BACHILLERES DE TABASCO PLANTEL No. _____

PENSAMIENTO MATEMATICO III

Datos de identificación					PM3-SA1-RU01
Situación didáctica	Mi laboratorio de matemáticas	Bloque de progresiones	1	Progresiones	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
Propósito de la situación	En equipos de cinco estudiantes, elaborar un reporte de investigación de un experimento dado (Caída libre, deslizamiento de un objeto por un plano inclinado, etc.), donde modele de forma gráfica y analítica el movimiento de la partícula, y determine su función de razón de cambio, para posteriormente socializarlo en el aula clase.				

CATEGORIAS/SUBCATEGORIAS			
CATEGORIAS	SUBCATEGORIAS		
C1 Procedural	C1S1 Elementos variacionales C1S2 Elementos geométricos C1S3 Elementos variacionales		
C2 Procesos de intuición y razonamiento	C2S1 Capacidad para observar y conjeturar C2S2 Pensamiento intuitivo C2S3 Pensamiento formal		
C3 Solución de problemas y modelación	C3S1 Uso de modelos y capacidad para observar y conjeturar C3S2 Pensamiento intuitivo y construcción de modelos C3S3 Estrategias heurísticas y ejecución de procedimientos no rutinarios		
C4 Interacción y lenguaje matemático	C4S1 Registro escrito, simbólico, algebraico e iconográfico C4S2 Negociación de significados C4S3 Ambiente matemático de comunicación		
Nombre de los alumnos			Grupo
	N. Lista:		N. Lista:
	N. Lista:		N. Lista:
	N. Lista:		N. Lista:

Evaluación					
CATEGORÍAS	Puntuación obtenida	Puntuación máxima	Ponderación	Retroalimentación	
C1. Procedural			25%	Logros	
C2. Procesos De intuición y razonamiento			25%		
C3. Soluciones de problemas y modelación			25%		
C4. Interacción y lenguaje matemático			25%	Aspectos de mejora	
Actitudinal			100%		
TOTAL					

Categoría	NIVEL DE PROGRESO			
	Destacado (4)	Competente (3)	Básico (2)	No presenta (1)
C1. Procedural.	Recolecta, Identifica y clasifica todos los datos obtenidos del experimento de forma clara. Todos los datos son ordenados y la gráfica corresponde a los datos obtenidos	Recolecta, Identifica y clasifica algunos datos obtenidos del experimento de forma clara. Algunos datos son ordenados y la gráfica corresponde a los datos obtenidos	Recolecta, Identifica y clasifica pocos datos obtenidos del experimento de forma clara. Los datos no son ordenados y la gráfica no corresponde a los datos obtenidos	Recolecta pocos datos del experimento, pero no Identifica ni clasifica dichos datos. Los datos no tienen orden y la gráfica no corresponde a los datos obtenidos
C3. Solución de problemas y modelación.	Están presentes las razones de cambio de los datos obtenidos (Velocidad y aceleración), así mismo, construye la gráfica de la función escalón (velocidad media) para las velocidades obtenidas. Intuye la razón de cambio instantánea para todos los tiempos solicitados.	Están presentes algunas de las razones de cambio de los datos obtenidos (Velocidad y aceleración), así mismo, la gráfica de la función escalón (velocidad media) está presente, pero no corresponde a las velocidades obtenidas. Intuye la razón de cambio instantánea para algunos de los tiempos solicitados.	Están presentes pocas de las razones de cambio de los datos obtenidos (Velocidad y aceleración), así mismo, la gráfica de la función escalón (velocidad media) está presente, pero no corresponde a las velocidades obtenidas. Intuye la razón de cambio instantánea para uno de los tiempos solicitados.	No están presentes las razones de cambio de los datos obtenidos (Velocidad y aceleración), la gráfica de la función escalón no está presente. No intuye la razón de cambio instantánea para los tiempos solicitados.
C4 Interacción y lenguaje matemático.	Presenta (de forma algebraica) la función de posición, así como la función velocidad como derivada de la función posición. La función velocidad coincide con la velocidad instantánea para los tiempos establecidos.	Presenta (de forma algebraica) la función de posición, así como la función velocidad como derivada de la función posición. La función velocidad tiene discrepancia mínima con la velocidad instantánea para los tiempos establecidos.	Presenta (de forma algebraica) la función de posición, así como la función velocidad como derivada de la función posición. La función velocidad no coincide con la velocidad instantánea para los tiempos establecidos.	No presenta (de forma algebraica) la función de posición, y por tanto, no presenta la función. La función velocidad no está presente y no compara los resultados.
Actitudinal	Contiene todos los elementos de un reporte de investigación y se encuentran en orden pertinente. La conclusión es clara y están presente los elementos del lenguaje matemático	Contiene algunos los elementos de un reporte de investigación y se encuentran en orden pertinente. La conclusión es clara y están presente algunos elementos del lenguaje matemático	Contiene pocos los elementos de un reporte de investigación y no se encuentran en orden pertinente. La conclusión es poco clara y están presente pocos elementos del lenguaje matemático	Contiene escasos elementos de un reporte de investigación y no se encuentran en orden pertinente. La conclusión no es clara y no se encuentran presente elementos del lenguaje matemático
	Trabaja de forma altamente colaborativa, con explicaciones claras y una gran disposición al trabajo organizado y metódico, cumpliendo con todos los criterios del docente.	Trabaja de forma colaborativa, con explicaciones claras y una disposición adecuada al trabajo organizado y metódico, cumpliendo la mayoría de los criterios del docente.	Se relaciona de manera limitada, con explicaciones comprensibles pero algunas imprecisiones, y una disposición inconsistente al trabajo organizado, cumpliendo solo algunos criterios del docente.	Tiene una mínima interacción con sus pares, presentando explicaciones poco claras, una disposición limitada al trabajo organizado, y no cumple con la mayoría de los criterios del docente.

Nombre y Firma del Líder de equipo	Firma del Facilitador

Evaluación Diagnóstica SA1

¿Qué tanto sé? (Apertura)



PM3-SA1-ED01

CUESTIONARIO PARA SOCIALIZAR

1. Corresponde a la razón de cambio instantánea del desplazamiento de un móvil:
 - a) Velocidad.
 - b) Aceleración.
 - c) Caída libre.
 - d) Gravedad.
2. Fue uno de los inventores del cálculo el cual usó para desarrollar la teoría de la gravitación universal.
 - a) Arquímedes.
 - b) Galileo Galilei.
 - c) Isaac Newton.
 - d) Albert Einstein.
3. Es un elemento geométrico sin dimensiones cuya posición en el espacio cartesiano de dos dimensiones se identifica mediante un par de números reales X, Y .
 - a) Punto.
 - b) Recta.
 - c) Eje de las abscisas.
 - d) Recta tangente.
4. Es cualquier recta que toca solo uno de los puntos de la circunferencia.
 - a) Pendiente.
 - b) Recta secante.
 - c) Eje de las ordenadas.
 - d) Recta tangente.
5. Calcula la suma de las siguientes ecuaciones: $3x + 2y + 6$ y $8x - 4y + 13$
 - a) $11x + 6y + 19$
 - b) $5x + 6y + 19$
 - c) $11x - 2y + 19$
 - d) $9x - 8y + 19$

PM3-SA1-ED01

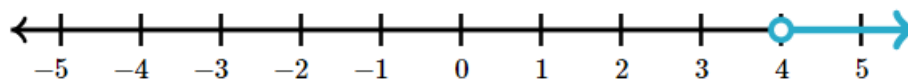
CUESTIONARIO PARA SOCIALIZAR

6. La velocidad se calcula con la siguiente función $v = \frac{d}{t}$ (velocidad es igual a distancia sobre tiempo), obtén la velocidad cuando la distancia es de 45 metros y el tiempo es 9 segundos.
- a) 9 m/s
 - b) 13 m/s
 - c) 18 m/s
 - d) 5 m/s
7. ¿Cuáles son las principales características de la función cuadrática?
- a) Baricentro, circuncentro y vértice.
 - b) Máximos, mínimos, concavidad y raíces.
 - c) Pendiente, máximos, mínimos.
 - d) Hipotenusa, vértice, ordenada.
8. Cuál es la coordenada de la función $f(x) = 6x - 3$ cuando $x=3$
- a) 15
 - b) 18
 - c) 21
 - d) 12
9. Si una función $f(x)$ es un polinomio, es continua en todo punto
- a) Verdadero
 - b) Falso
10. La suma de funciones continuas en el punto "c" es una función continua en "c"
- a) Verdadero
 - b) Falso

PM3-SA1-ED01

CUESTIONARIO PARA SOCIALIZAR

11. La grafica muestra que los valores que puede tomar el rango de la flecha azul son:



- a) $x > 4$
- b) $x < 4$
- c) $x \geq 4$
- d) $x = 4$

12. Muestran la relación entre dos expresiones que no son iguales.

- a) Expresiones algebraicas
- b) Ecuaciones
- e) *Desigualdades*
- c) Funciones

PM3-SA1-LC01 Lista de cotejo para evaluar el Portafolio de Evidencias SA1 de las actividades de reforzamiento

Unidad de aprendizaje		1	Grupo		Fecha:	
Progresión	1. Genera intuición sobre conceptos como variación promedio, variación instantánea, procesos infinitos y movimiento a través de la revisión de las contribuciones que desde la filosofía y la matemática hicieron algunas y algunos personajes históricos en la construcción de ideas centrales para el origen del cálculo. (C2M1) 2. Analiza de manera intuitiva algunos de los problemas que dieron origen al cálculo diferencial, en particular el problema de determinar la recta tangente a una curva en un punto dado. (C3M1, C4M1) 3. Revisa situaciones y fenómenos donde el cambio es parte central en su estudio, con la finalidad de modelarlos aplicando algunos conocimientos básicos de funciones reales de variable real y las operaciones básicas entre ellas. (C3M1) 4. Analiza la gráfica de funciones de variable real buscando simetrías, y revisa conceptos como continuidad, crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos relativos, concavidades, entre otros, resaltando la importancia de éstos en la modelación y el estudio matemático. (C3M1) 5. Conceptualiza el límite de una función de variable real como una herramienta matemática que permite comprender el comportamiento local de la gráfica de una función. (C1M1, C2M2, C4M1) 6. Identifica y contextualiza la continuidad de funciones utilizadas en la modelación de situaciones y fenómenos y hace un estudio, utilizando el concepto de límite, de las implicaciones de la continuidad de una función tanto dentro del desarrollo matemático mismo, como de sus aplicaciones en la modelación. (C2M1, C4M2) 7. Interpreta , a partir de integrar diferentes perspectivas y métodos, el concepto central del cálculo diferencial, "la derivada", de forma intuitiva e intenta dar una definición formal, así como la búsqueda heurística para encontrar la derivada de la función constante, lineal y algunas funciones polinomiales. (C1M2, C2M2)					
Meta	C1M1: Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno. C1M2: Analiza los resultados obtenidos al aplicar procedimientos algorítmicos propios del Pensamiento Matemático en la resolución de problemáticas teóricas y de su contexto . C2M1: Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo. C2M2: Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieren explicación o interpretación. C3M1: Selecciona un modelo matemático por la pertinencia de sus variables y relaciones para explicar una situación, fenómeno o resolver un problema tanto teórico como de su contexto. C4M1: Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural. C4M2: Socializa con sus pares sus conjeturas, descubrimientos o procesos en la solución de un problema tanto teórico como de su entorno.					
Categorías	C1 Procedural	Subcategorías	C1S1 Elementos variacionales C1S2 Elementos geométricos C1S3 Elementos variacionales			
	C2 Procesos de intuición y razonamiento		C2S1 Capacidad para observar y conjeturar C2S2 Pensamiento intuitivo C2S3 Pensamiento formal			
	C3 Solución de problemas y modelación		C3S1 Uso de modelos y capacidad para observar y conjeturar C3S2 Pensamiento intuitivo y construcción de modelos C3S3 Estrategias heurísticas y ejecución de procedimientos no rutinarios			
	C4 Interacción y lenguaje matemático		C4S1 Registro escrito, simbólico, algebraico e iconográfico C4S2 Negociación de significados C4S3 Ambiente matemático de comunicación			
Nombre de los integrantes						
Aprendizajes Trayectoria					Contenidos Específico	
1. Valora la aplicación de procedimientos automáticos y algorítmicos, así como la interpretación de sus resultados, para anticipar, encontrar y validar soluciones a problemas matemáticos, de áreas del conocimiento y de su vida personal. 2. Adopta procesos de razonamiento matemático tanto intuitivos como formales tales como observar, intuir, conjeturar y argumentar, para relacionar información y obtener conclusiones de problemas (matemáticos, de las ciencias naturales, experimentales y tecnología, sociales, humanidades y de la vida cotidiana). 3. Modela y propone soluciones a problemas tanto teóricos como de su entorno, empleando lenguaje y técnicas matemáticas. 4. Explica el planteamiento de posibles soluciones a problemas y la descripción de situaciones en el contexto que les dio origen empleando lenguaje matemático y lo comunica a sus pares para analizar su pertinencia.			• Aportaciones históricas al desarrollo del cálculo: Filosofía griega, Método de Exhaustión de Arquímedes, Aproximación de tangentes de Fermat, Integración de Newton. • Conceptos primordiales: Cambio, variación promedio, variación instantánea, procesos finitos, movimiento. • Elementos básicos: punto, recta, secante, tangente, pendiente. • Problemas que le dieron origen al cálculo: determinar la recta tangente para velocidad instantánea y problemas de máximos y mínimos. • Operaciones con funciones: suma y resta, multiplicación y división. • Demostrar el uso de las funciones reales en problemas: Problema del movimiento, caída libre, crecimiento en función del tiempo. • Análisis de las características de las gráficas: funciones a trozo, concepto de continuidad. • Funciones lineales: concepto de crecimiento y decrecimiento. • Funciones cuadráticas y cúbicas: concepto de crecimiento y decrecimiento, concepto de máximos y mínimos, conceptos de concavidades. • Modelado grafico de funciones: Lineales, cuadráticas y cúbicas. • Análisis de gráficas: Análisis de crecimiento y decrecimiento local, identificación de máximos y mínimos, identificación de concavidades. • Análisis grafico de los límites mediante una función a trozos. • Conceptualización de los límites: Aproximación a los límites de una función por la derecha y por la izquierda, tabulación de funciones en un intervalo de aproximación, gráfica de una función en el plano cartesiano. • Análisis de la continuidad de funciones contextualizadas. • Identificación de los significados de continuidad, las raíces y los límites dentro de una función real. • La derivada como razón de cambio: pendiente. • Definición de la derivada: definición gráfica a partir de la transformación de una secante en una tangente, definición algebraica por el método de los 4 pasos.			



TABASCO



COBATAB
COLEGIO DE BACHILLERES
DE TABASCO

"Educación que genera cambio"

CRITERIOS		%	CUMPLE		Puntaje
			SI	NO	
1.	Presentar el portafolio en la fecha y hora establecidas, mostrando puntualidad y responsabilidad.	10			
2.	Incluye una portada que contenga todos los datos de identificación relevantes, tales como número de plantel, semestre, grupo, bloque, nombre completo, nombre de la Unidad de Aprendizaje Curricular (UAC) y del docente, además de especificar claramente el objetivo de la UAC, la fecha y el lugar.	10			
3.	Presentar una estructura organizada y ordenada de acuerdo con las indicaciones proporcionadas por el docente.	10			
4.	Las actividades incluidas en el portafolio son originales y reflejen el esfuerzo del estudiante, además están presentadas con limpieza y claridad lo que facilita su comprensión.	20			
5.	Contiene todos los trabajos solicitados por el docente, sin omitir ninguno.	20			
6.	Cada trabajo incluido en el portafolio está calificado por el docente y cuenta con su sello o firma, lo que certifica la evaluación realizada.	30			
Calificación					
Aspectos para mejorar:					
					Firma

¡Hola CocaCompañero!

Durante este proceso de aprendizaje por competencias, es importante que recuerdes lo aprendido con el fin de reforzamiento y cumplir con los criterios a evaluar para conseguir una buena calificación.

Atendiendo a las indicaciones de tu docente, recuerda que debes volver aquí para completar lo que se requiere en tu PORTAFOLIO DE EVIDENCIAS.

33



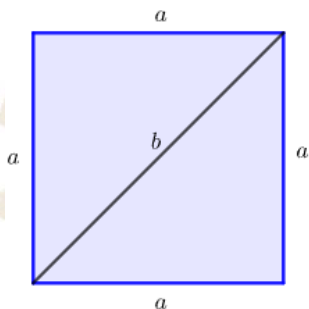
SESIÓN 01

Progresión 1

Aportaciones históricas al desarrollo del cálculo

Filosofía griega.

Los matemáticos griegos desarrollaron un concepto relacionado con las magnitudes de la naturaleza y objetos geométricos: el de magnitud conmensurable. Hasta mediados del siglo V a. C. se creía que todas las magnitudes conocidas eran conmensurables, es decir, que, dadas dos magnitudes cualesquiera u y v (de las conocidas en esa época), era posible hallar enteros n y m y otra magnitud w tales que $u = nw$ y $v = mw$. Sin embargo, se descubrió una situación, la diagonal y el lado de un cuadrado no cumplen esta condición, siendo un contraejemplo a la creencia que ellos tenían.



Esto condujo a admitir que existían otro tipo de magnitudes que era necesario abordar de una forma alternativa, lo cual motivó los procesos infinitos. Suponer que la diagonal y el lado del cuadrado son conmensurables es equivalente a suponer que $\sqrt{2}$ es un número racional, lo cual se puede verificar que es falso. De hecho, este número se puede expresar como el límite en el infinito de la siguiente expresión en fracciones continuas:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}}$$



Recuperada de
<https://media.istockphoto.com/id/1436208050/es/foto/s%C3%ADmbolo-del-infinito-dorado.jpg?s=612x612&w=0&k=20&c=viv5S7xQMXtg8VKXi01r036lGGqAw0giv2ah1pBndKs> en junio, 2024

Método de Exhaución de Arquímedes.

Arquímedes de Siracusa, es considerado uno de los científicos más importantes de la antigüedad. Es reconocido por sus aportaciones la física, astronomía y matemáticas. Respecto a esta última, destaca el método para hallar áreas de curvas: Método de Exhaución, aunque en realidad, fue Eudoxo de Cnido quien desarrolló el método que consiste en agotar el área que se va a calcular por medio de figuras conocidas, por ejemplo, polígonos que son fáciles de manejar.

Basado en las ideas de Eudoxio, Arquímedes amplía la técnica añadiendo la justificación del resultado por una demostración al absurdo en la cual la herramienta fundamental es el la Proposición X.1 de la obra Los Elementos de Euclides.



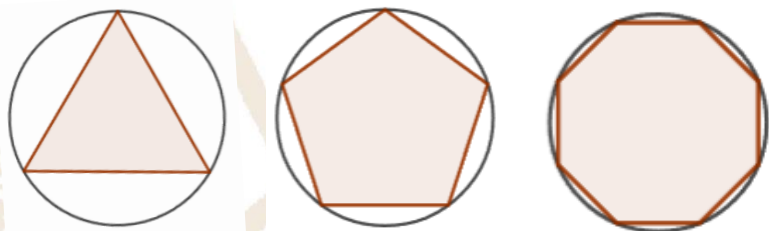
Eudoxio de Cnidos. (s/f).
Ecured.cu. Recuperado de
https://www.ecured.cu/Eudoxio_de_Cnidos el 8 de junio de 2024, de



Arquímedes de Siracusa, recuperado de
<https://deportescineyotros.com/2020/01/21/grandes-cientificos-de-la-grecia-antigua-arquimedes/> el 8 de junio de 2024

El ejemplo clásico que desarrolló Arquímedes es aproximar el área de un círculo, ya sea por polígonos inscritos o circunscritos, los cuales podemos apreciar en las siguientes imágenes.

Polígonos inscritos



Polígonos circunscritos

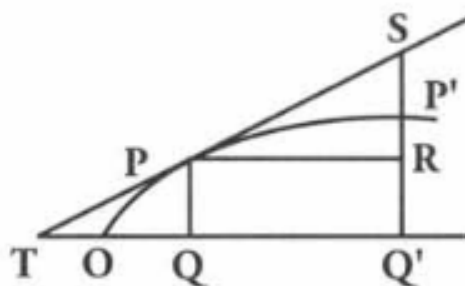


Método de tangentes de Fermat.

Pierre de Fermat fue un gran matemático francés, aunque su profesión era la abogacía, dedicaba sus ratos de ocio a las matemáticas. Dentro de sus muchas aportaciones a las matemáticas se encuentra como uno de los pioneros del cálculo infinitesimal, desarrollando un método para hallar las tangentes a curvas polinómicas. Este método consiste en hallar la recta tangente a la curva por medio de aproximar las razones de dos triángulos semejantes, en el que uno de ellos se hace muy pequeño hasta desaparecer.



Recuperado de *Pierre de Fermat*. (2023, agosto 25).
Calcular Área.
<https://www.calcularareas.com/pierre-de-fermat/>



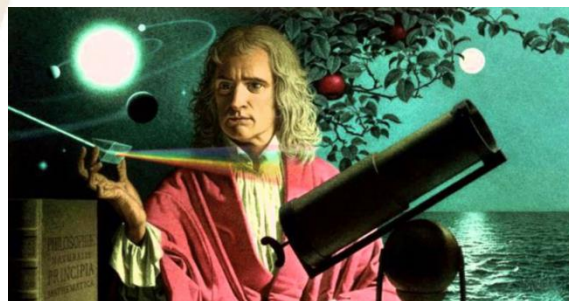
Recuperado de Cantoral, R., & Farfán, R. M. (2004). *Desarrollo conceptual del cálculo*. (1ra Edición)
México: International Thomson Editores.

Por medio de la semejanza de los triángulos TPQ y PSR , haciendo $\epsilon = QQ'$ y aproximando $SR \cong P'R$ para ϵ pequeño. Después de realizar algunos pasos algebraicos y haciendo *desaparecer* el ϵ se obtiene el valor de la longitud del segmento TQ y con ello las coordenadas del punto T que junto con el punto P dado al principio se obtienen dos puntos de la recta tangente, siendo este último el punto de tangencia.

Integración de Newton.

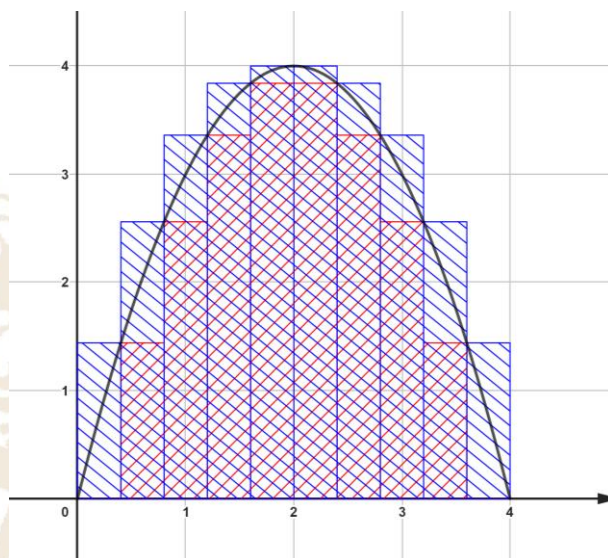
Isaac Newton fue uno de los más grandes científicos en la historia de la humanidad, siendo su obra maestra *Philosophiae naturalis principia mathematica* (1687). En el cual incluye resultados relacionados con límites y diferenciales, conceptos centrales del cálculo. Dentro de su obra desarrolla una axiomática similar a la matemática griega y desarrolla un método para hallar áreas de curvas por medio de rectángulos, inspirado de cierta forma por las ideas de Arquímedes. El método es como sigue:

Dada una curva dada por $f(x)$ sobre un segmento de la recta de números, se desea calcular el área limitada por la curva y el eje X usando rectángulos tanto inscritos como circunscritos y luego hacer la diferencia entre



Leskow, E. C. *Leyes de Newton: definición, fundamentos y características*. (2017, agosto 16). Recuperado el 9 de junio de 2024, de <https://humanidades.com/leyes-de-newton/>

estos. En la siguiente figura se muestra la gráfica de una función cuadrática y sumas inferiores y superiores de rectángulos.



Newton calculó la diferencia entre las áreas de los rectángulos circunscritos y los inscritos (sombreada en azul) para después demostrar que ésta es cero cuando el número de rectángulos crece (y su anchura decrece) *in infinitum*. Y por lo tanto el área debajo de la curva es la que se obtiene al final del proceso *in infinitum*.

Conceptos primordiales

Cambio

El cambio puede definirse como todo movimiento, toda interacción, así como toda alteración de un objeto y sus propiedades.

El cambio incluye desplazamientos espaciales, transformaciones en las formas de movimiento y en procesos de desarrollo. El cambio también incluye el aumento o disminución de las características de un objeto. A través de la historia han existido cambios no solo en las propiedades de los cuerpos, sino que también en las mismas leyes del movimiento de la materia.

En matemáticas, siempre tratamos de cuantificar todos los sucesos y fenómenos que nos rodean, por lo que el cambio también termina volviéndose un valor a estimar. A ese valor lo llamamos tasa de cambio o variación promedio.

Variación promedio.

La tasa de variación de una función es el cambio que experimenta dicha función cuando su variable independiente pasa de un valor a otro.

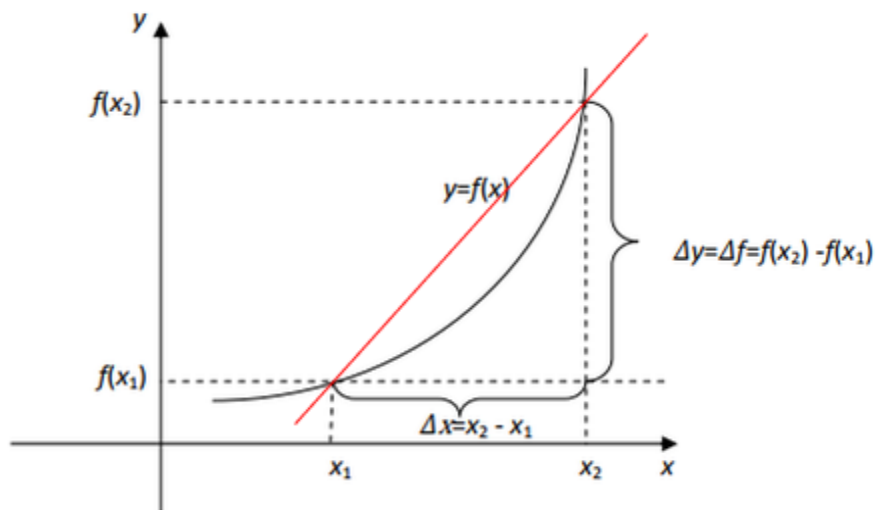
Nos referimos a la tasa de variación como TV de la siguiente manera:

$$T.V = f(x_2) - f(x_1)$$

La tasa de variación media o promedio indica la variación que existe entre la función respecto a la variable independiente.

$$T.V.M. = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Gráficamente, podemos representar la tasa de variación media como la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos x_1 y x_2



Rescatado de <https://calculus502.weebly.com/razoacuten-de-cambio> en junio, 2024

Sea Δx (delta x) la distancia entre x_1 y x_2

Tenemos que $\Delta x = x_2 - x_1$ realizamos el despeje y obtenemos $x_2 = x_1 + \Delta x$

Y de la misma forma con Δy

$\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$, se realiza la sustitución pertinente

$$T.V.M = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Revisemos el siguiente planteamiento

1.- Calcular la TVM de la función $f(x) = x^2 - x$ en el intervalo $[2,6]$. Sustituir en:

$$T.V.M. = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$T.V.M. = \frac{f(6) - f(2)}{6 - 2}$$

$$T.V.M. = \frac{[(6)^2 - 6] - [(2)^2 - 2]}{6 - 2}$$

$$T.V.M. = \frac{(36 - 6) - (4 - 2)}{4}$$

$$T.V.M. = \frac{30 - 2}{4}$$

$$T.V.M. = \frac{28}{4} = 7$$

2. El índice de crecimiento de la bolsa en México paso de 1670 a 1890 en un año. Encontrar la tasa de variación media mensual.

Sustituir en:

$$T.V.M. = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

$$f(x_1 + \Delta x) = 1890$$

$$f(x_1) = 1670$$

$$\Delta x = 12 - 0 = 12$$

$$T.V.M. = \frac{1890 - 1670}{12}$$

$$T.V.M. = \frac{120}{12} = 10$$



TABASCO

"Educación que genera cambio"



COBATAB
COLEGIO DE BACHILLERES
DE TABASCO

Aplicaciones

Se puede emplear en economía para minimizar costos, maximizar la calidad, así como en física para determinar la velocidad de un cuerpo o incluso en geometría para determinar la cantidad de material necesario para construir un cilindro.

Otros ejemplos:

- Determinar el tamaño de una población
- El volumen de un globo al ser inflado
- Distancia recorrida

Variación instantánea

Uno de los dos conceptos principales del cálculo consiste en determinar la tasa de cambio de un punto con respecto a otro. Por ejemplo, la velocidad puede ser definida como la tasa de desplazamiento en función del tiempo ($v = \frac{d}{t}$). Si una persona recorre 100 kilómetros en 2 horas, su velocidad es:

$$v = \frac{100km}{2hr} = \frac{50km}{hr}$$

A esta velocidad calculada se le llama la **velocidad promedio o la tasa promedio de cambio**. Pese a que seguramente a lo largo de ese trayecto la persona debió haber bajado o subido la velocidad ocasionalmente, generalmente es suficiente decir que viajó durante 2 horas a una velocidad promedio de 50 km/hr. Sin embargo, si el conductor choco, no sería su velocidad promedio la que determina si sobrevive o no, sino la velocidad a la cual viajaba en ese momento puntual. En ese sentido, no es la velocidad promedio la que importa sino la **velocidad instantánea** en el momento del choque. Es así como tenemos distintos tipos de velocidades: velocidad media y velocidad instantánea.

Podemos definir la tasa de variación instantánea de una función como el límite de dicha función donde la distancia entre el punto inicial y final es cero. Si expresamos el intervalo en términos de "a" y "b", la distancia entre ambos se vuelve infinitamente pequeño cuando "b" se aproxima a "a".

Esto es:

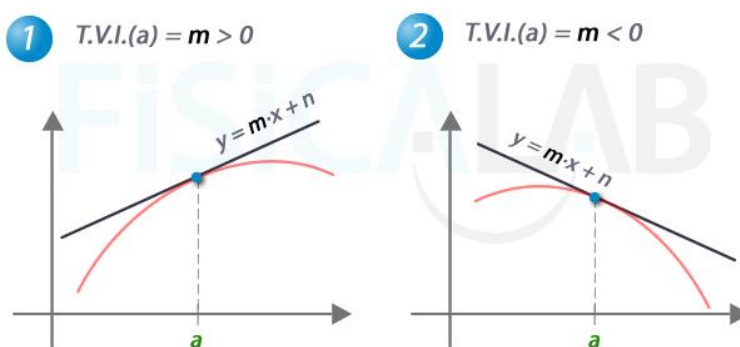
$$T.V.I(a) = \lim_{b \rightarrow a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Del mismo modo que la T.V.M., la tasa de variación instantánea puede ser positiva, negativa o nula. Nos indica que tan rápido crece o decrece la función en un determinado punto. Es un número real.

Representación geométrica

La tasa de variación instantánea en el punto a es la pendiente de una recta tangente a la función en ese punto.

Tasa de variación instantánea en a



Rescatado de <https://www.fisicalab.com/apartado/tasa-variacion-instantanea> en junio, 2024

Procesos infinitos

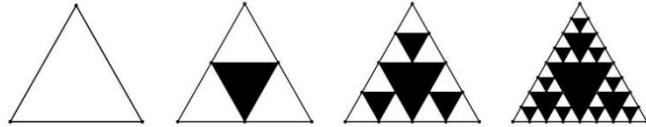
La noción de proceso infinito se centra en un proceso iterativo ilimitado, es decir, que por muy grande que sea el número de veces que se realiza el proceso, siempre es posible efectuar uno más, y otro más, y así sucesivamente, hasta el infinito.

El estudio de los procesos infinitos es básico para el desarrollo del Cálculo Diferencial e Integral, puesto que el concepto de la derivada y la integral de una función están relacionados con los *procesos infinitos* y su aprendizaje por parte de los alumnos facilitará el estudio de los conceptos mencionados, mediante problemas que involucren a procesos infinitos, cuya resolución permitirá la comprensión de sus características.

Los objetos geométricos en los que se repite un mismo patrón de comportamiento, en diferentes escalas y con diferente orientación; a estos objetos geométricos se les llama **fractales**.

Los fractales son:

- a) Cuadrados inscritos
- b) Triángulo de Sierpinsky
- c) Árbol Pitagórico
- d) Copo de nieve



Recuperado de Romero, G. F. (2021, junio 1). Problema 2 - Triángulo de Sierpinsky. Portal Académico del CCH.

<https://portalacademico.cch.unam.mx/calculo1/procesos-infinitos/problema-2-triangulo-de-Sierpinsky> en junio, 2024.

La paradoja de Zenón (Aquiles y la tortuga).

Zenón confundió de manera sorprendente a sus colegas pensadores al señalar que el heroico griego Aquiles, por más que corriera velozmente, no alcanzaría a la tortuga a la cual se le había dado una ventaja inicial, ya que cuando éste alcanzará el punto de la tortuga A, la tortuga se habría desplazado al punto B y cuándo llegará a B la tortuga hubiera llegado a C. De esta manera, la tortuga siempre estaría situada delante de Aquiles, aunque solo fuera por un infinitésimo.

Movimiento

Trayectoria: Sucesión de posiciones por las que va pasando un móvil u objeto.

Movimiento rectilíneo uniforme (MRU) Es el movimiento más sencillo. La trayectoria, como lo indica su nombre, es una línea recta y la velocidad es constante (no hay aceleración). Un sistema móvil que se mueve en MRU avanza distancias idénticas en iguales tiempos, dado que la velocidad es constante. Esto quiere decir que por ejemplo, cada segundo siempre estará avanzando la misma distancia. De forma similar se describe el MRUA (movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, siempre estará incrementando la misma velocidad.)



Recuperado de <https://matemathweb.com/fisica/movimiento-rectilineo-uniforme-variado/> en junio, 2024.

Dado que la velocidad es un valor constante, cuando un móvil se desplaza en MRU, el gráfico de la posición que tiene el móvil en función del tiempo es una línea recta cuya pendiente es la velocidad media. Recordemos, que la ecuación de una recta es:

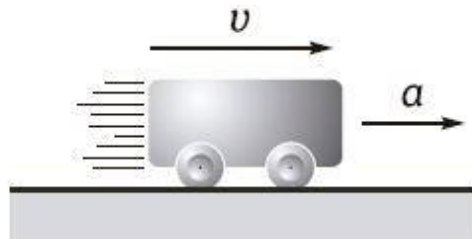
$$y = mx + b$$

la variable independiente "x", en este caso es el tiempo (t), la variable dependiente "y" es la posición, la pendiente (m) es entonces:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta(\text{posición})}{\Delta(\text{tiempo})} = \text{velocidad media}$$

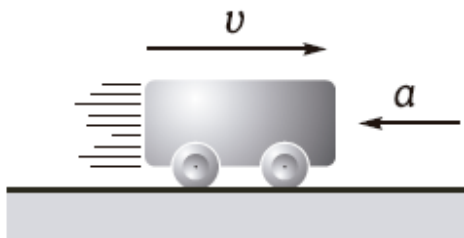
Dependiendo de si representamos un avance o un retroceso, podremos observar una pendiente positiva (si es un avance) o una pendiente negativa (si es un retroceso), pero eso dependerá de cómo definimos la posición inicial en el sistema de referencia. Si no hubiera cambio de posición, la recta tendría una pendiente igual a cero.

Movimiento acelerado: Cuando el módulo de la velocidad aumenta entonces la dirección de la velocidad y la aceleración son iguales.



Recuperado de Zill, D. G. (1987). *Cálculo con geometría analítica*. Grupo Editorial Iberoamérica en junio, 2024.

Movimiento desacelerado: Cuando el módulo de la velocidad disminuye entonces la dirección de la velocidad y la aceleración son opuestas.



Recuperado de Zill, D. G. (1987). *Cálculo con geometría analítica*. Grupo Editorial Iberoamérica en junio, 2024.

CATEGORIAS

PM3 - SA1 ACT 01

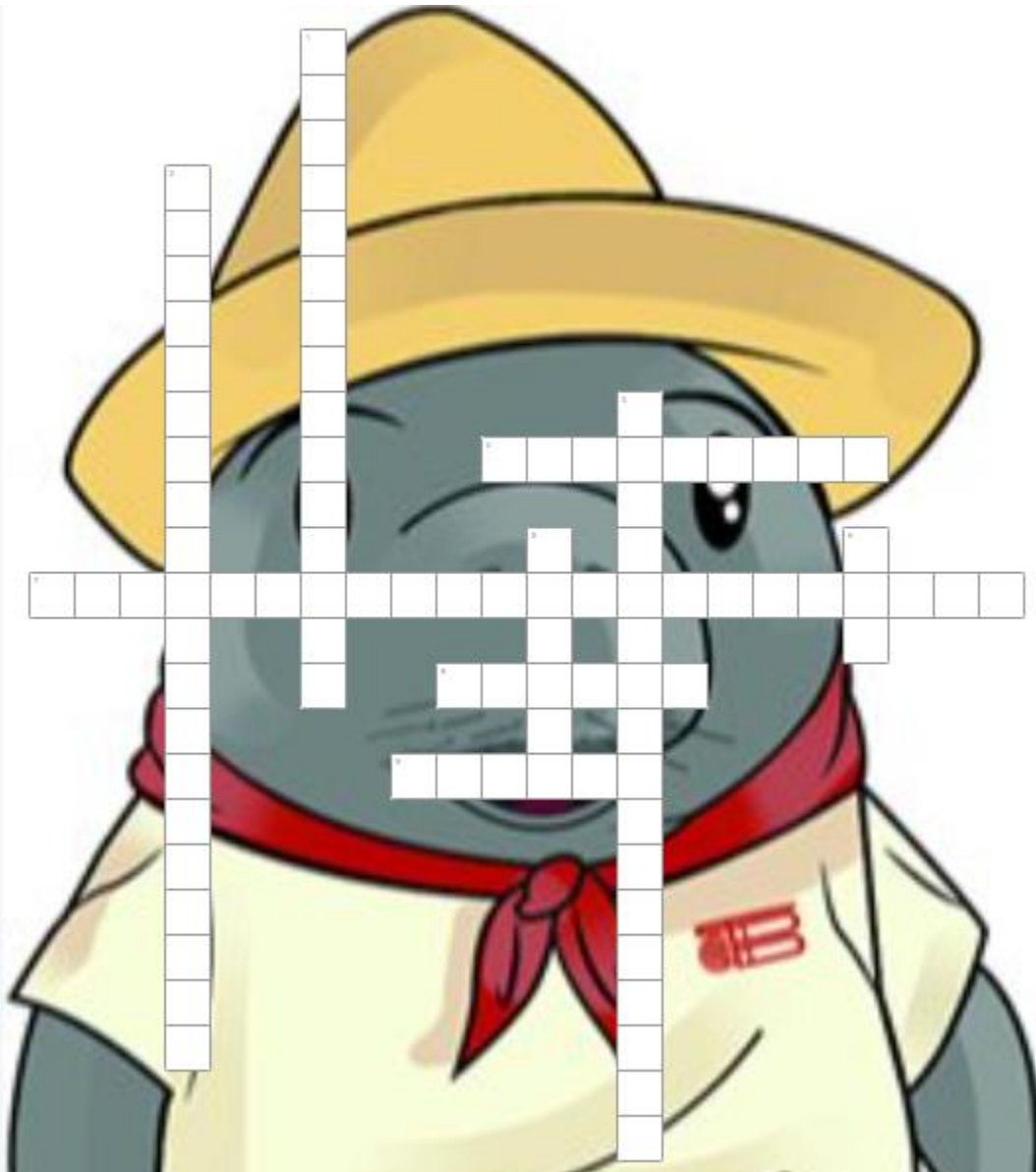
ACTIVIDAD DE REFORZAMIENTO:

CRUCIGRAMA

C2 Procesos de intuición y razonamiento.



Instrucciones: En binas, completar el crucigrama con la información estudiada sobre Aportaciones históricas y conceptos primordiales del cálculo.





TABASCO



COBATAB
COLEGIO DE BACHILLERES
DE TABASCO

"Educación que genera cambio"

Verticales

- Las magnitudes inconmensurables fueron las que motivaron las ideas de procesos infinitos, en la matemática griega.
- Es la pendiente de una recta tangente a la curva en un valor específico de la variable independiente.
- La tasa de variación de una función es el cambio que experimenta dicha función cuando su variable independiente pasa de un valor a otro.
- Fue quien desarrolló el método que consiste en hallar la recta tangente a la curva por medio de aproximar las razones de dos triángulos semejantes, en el que uno de ellos se hace muy pequeño hasta desaparecer.
- Es el que describe un objeto que se mueve en línea recta a velocidad constante.

Horizontales

- Método desarrollado por Eudoxo, pero que más tarde ampliaría Arquímedes añadiendo la justificación del resultado por medio de la proposición X.1 de los elementos de Euclides.
- Cuando el módulo de la velocidad disminuye entonces la dirección de la velocidad y la aceleración son opuestas.
- Puede definirse como todo movimiento, toda interacción, así como toda alteración de un objeto y sus propiedades.
- Calculó la diferencia entre las áreas de los rectángulos circunscritos y los inscritos en la curva para después demostrar que ésta es cero cuando el número de rectángulos crece (y su anchura decrece) in infinitum. Y por lo tanto el área debajo de la curva es la que se obtiene al final del proceso in infinitum.

SESIÓN 02

Progresión 2

Elementos básicos (conceptos y representaciones graficas).

Punto, recta, secante, tangente y pendiente.

La geometría analítica es la rama de las matemáticas que establece una conexión entre el álgebra y la geometría euclidiana. En ella se estudian figuras referidas a un sistema de coordenadas.

La geometría analítica se encarga de las figuras que se representan usando un sistema de coordenadas y resuelven los problemas geométricos mediante métodos algebraicos. De esta forma, las coordenadas se representan con pares de números y las figuras, con ecuaciones.

El plano cartesiano tiene varios usos, uno de ellos es la localización de un punto específico con ayuda de coordenadas, las cuales puedes encontrar en un mapa de tu ciudad o de tu país.

¿Sabías que la idea del plano cartesiano surgió cuando una mosca se cruzó en la mirada de Descartes mientras descansaba en su cama? La siguió con la vista, preguntándose si era posible determinar su posición a cada instante. Llegó a la conclusión de que sería posible si se conociera la distancia de la mosca a dos superficies perpendiculares (la pared y el techo) se levantó de la cama y dibujo dos rectas perpendiculares sobre un papel. Así la ubicación de cualquier punto de la hoja quedaba determinada por su distancia respecto a estos ejes que llamo coordenadas del punto.

Punto: Es un elemento geométrico sin dimensiones cuya posición en el espacio cartesiano de dos dimensiones se identifica mediante un par de números reales X , Y (abscisa, ordenada). La abscisa es la distancia dirigida medida desde el eje " y " hasta el punto definido y la ordenada es la distancia dirigida medida desde el eje " x " hasta el punto definido.

Recta: La recta es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan a dos puntos fijos dados y diferentes (A y B en la figura).

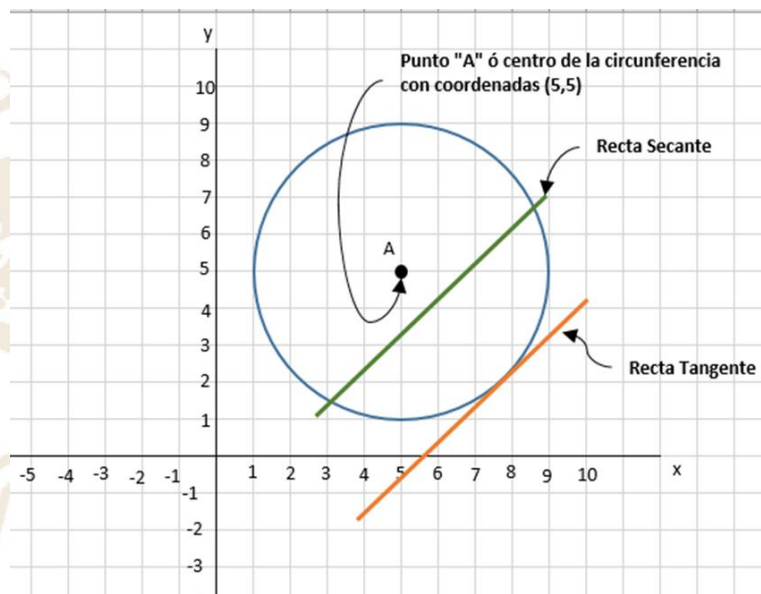


Secante: Es cualquier recta que corta una circunferencia en dos puntos.

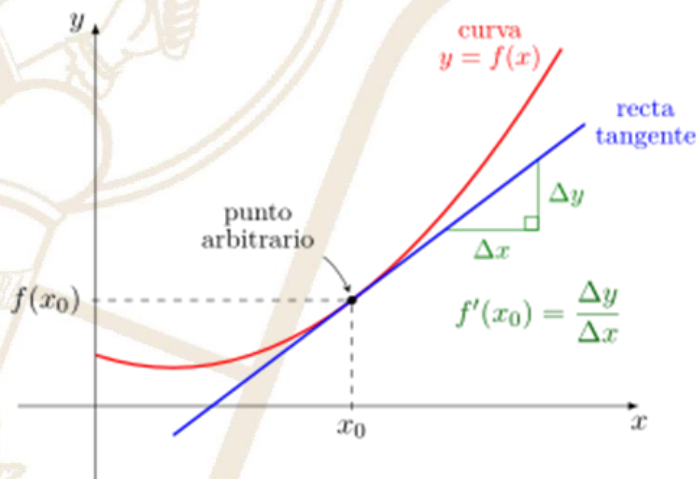
Tangente: Es cualquier recta que toca solo uno de los puntos de la circunferencia, también se conoce como tangencia.

Una tangente a un círculo es una línea recta que toca el círculo solamente en un punto. Este punto es llamado el punto de tangencia. La tangente en cualquier punto de un círculo es perpendicular al radio a través del punto de tangencia. La recta tangente indica la pendiente de la curva en el punto en que se tocan.

Podemos apreciar los conceptos antes mencionados en la siguiente imagen:



Pendiente: La pendiente de la recta tangente a una curva en un punto es igual a la derivada de la función en dicho punto. También podríamos decir que la pendiente de la recta tangente es la razón de cambio instantáneo.



SESIÓN 03

Problemáticas para determinar la pendiente de una recta tangente.

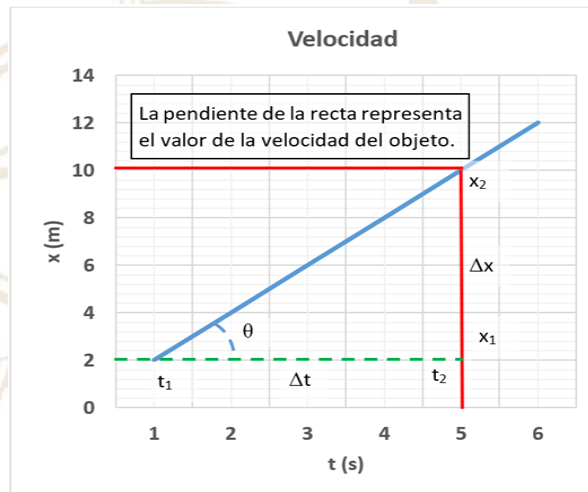
Velocidad instantánea.

Si un cuerpo en movimiento (móvil), mantiene una trayectoria recta y recorre distancias iguales en intervalos de tiempo iguales, podemos decir que realiza un movimiento rectilíneo uniforme (MRU). Suponga que, en 1 segundo un móvil se desplaza 2 metros; al paso de 2 segundos, se habrá desplazado 4 metros; al transcurrir 3 segundos, su desplazamiento sería de 6 metros, y así sucesivamente.

Podemos observar que la relación entre desplazamiento y tiempo (velocidad) permanece constante, por cada incremento de tiempo, obtendremos un incremento constante en su desplazamiento. Si deseamos representar los cambios en una variable, debemos utilizar la letra griega Δ (delta), y así, podemos expresar la fórmula de la velocidad de acuerdo con los cambios en su desplazamiento respecto al tiempo de la siguiente manera:

$$v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

Si graficamos los datos de la magnitud del desplazamiento en función del tiempo, podemos obtener:



Cuando se grafican diferentes valores del desplazamiento en función del tiempo y se unen los puntos, podemos obtener una línea recta. La pendiente de la recta representa la magnitud de la velocidad e indica que permanece constante, debido a que, para una línea recta los cambios iguales

a lo largo de un eje corresponden a cambios iguales sobre el otro eje. Es evidente que existe una relación de proporcionalidad directa entre la variable desplazamiento y la variable tiempo.

La pendiente de la recta obtenida de la gráfica desplazamiento-tiempo es una constante de proporcionalidad entre ambas variables y representa la magnitud de la velocidad. Mientras mayor sea la pendiente de la recta, mayor será la velocidad del cuerpo.

Para poder calcular la magnitud de la velocidad, podemos determinar la tangente de la recta, lo que sería el valor de su pendiente en cualquier punto. Si se dibuja un triángulo rectángulo entre dos puntos cualesquiera de la recta, dicha recta se convierte en la hipotenusa. De acuerdo con las propiedades del triángulo rectángulo, el cual podemos observar en nuestra gráfica, la tangente es igual a:

$$\tan\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Analicemos el siguiente planteamiento

José viaja en autobús para visitar a sus abuelos en vacaciones, mientras observa el camino, comienza a recordar su clase de pensamiento matemático y decide anotar el tiempo que se toma el autobús para recorrer la distancia entre los postes que están a un lado de la carretera, sabiendo que la distancia entre dichos postes es de 50 m, obtiene los siguientes datos:

Poste	t ₁ (s)	x ₁ (m)	t ₂ (s)	x ₂ (m)
1	0	0	2	50
2	2	50	4	100
3	4	100	6	150
4	6	150	8	200
5	8	200	10	250
6	10	250	12	300
7	12	300	14	350
8	14	350	16	400
9	16	400	18	450
10	18	450	20	500

Con el apoyo del docente Analiza cómo será el comportamiento gráfico empleando los datos de la tabla y calcula la velocidad del autobús, así como también la distancia que recorre en 1 minuto.

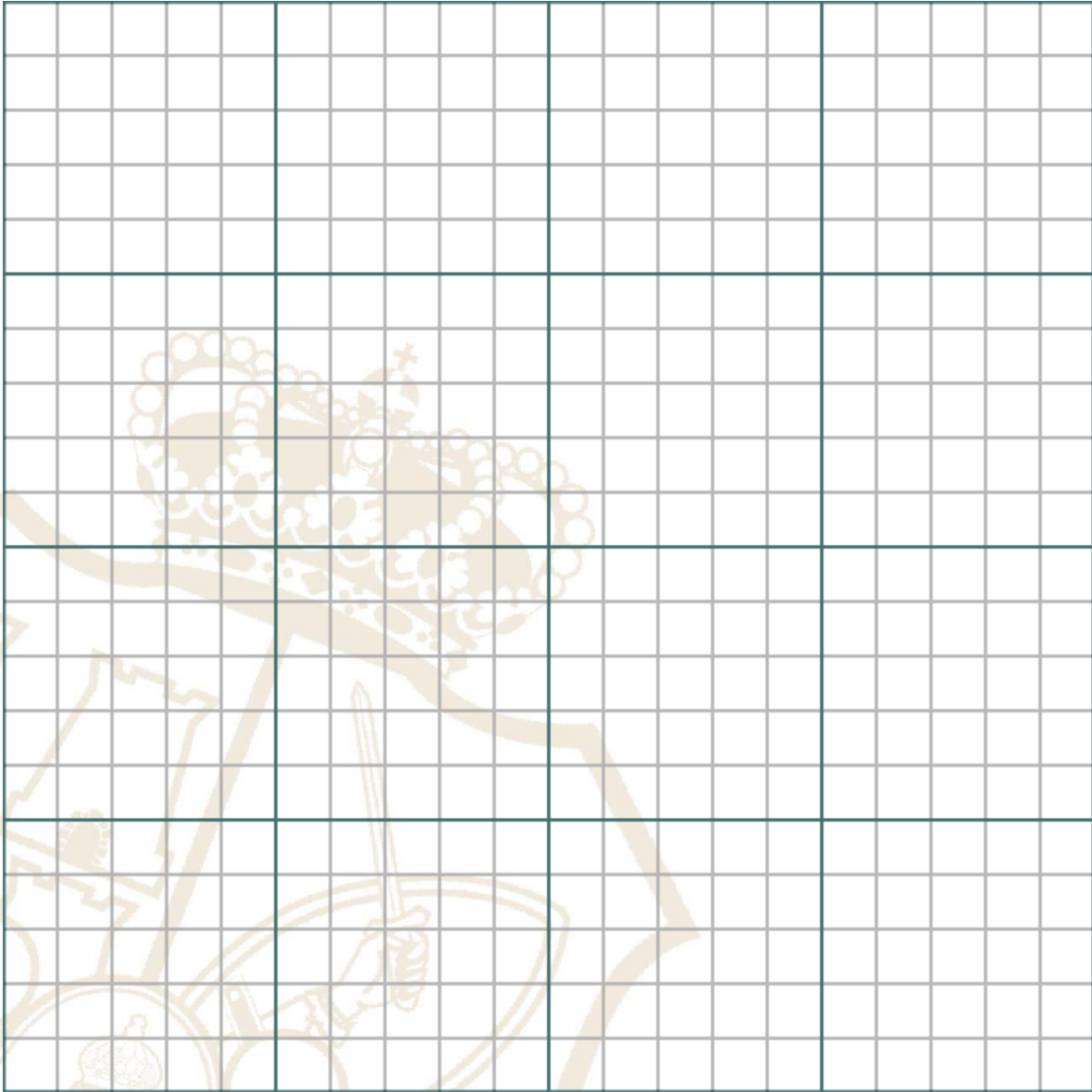


TABASCO



COBATAB
COLEGIO DE BACHILLERES
DE TABASCO

"Educación que genera cambio"



Problemas de máximos y mínimos

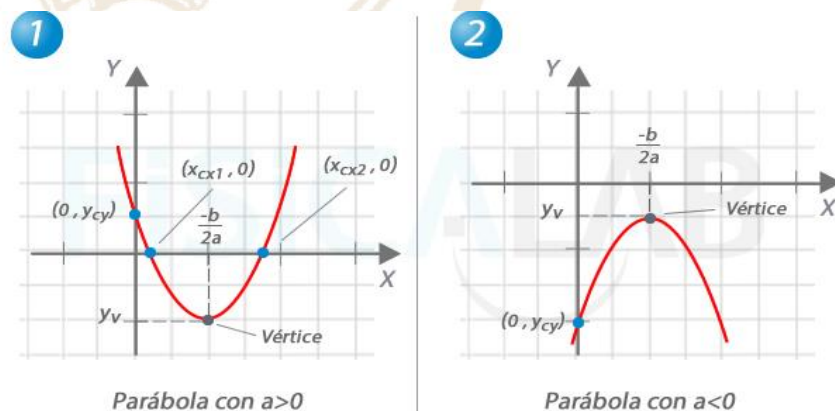
Si conocemos las tangentes a una curva en un determinado dominio, podemos hallar los máximos o mínimos en ese dominio (máximos o mínimos locales). Esto sucede cuando la pendiente de la tangente es cero, es decir cuando la tangente es horizontal, como podemos observar en la siguiente gráfica:



Recuperado de Julián, C. (2018, noviembre 16). *Máximos y Mínimos de una Función*. Fisimat | Blog de Física y Matemáticas; Fisimat. <https://www.fisimat.com.mx/maximos-y-minimos-de-una-funcion/> en junio, 2024.

Un caso sencillo es el de las funciones cuadráticas. Las gráficas de dichas funciones son parábolas las cuales tienen un vértice en dónde precisamente tienen el máximo o mínimo. Si el coeficiente del término cuadrático es positivo la parábola abre hacia arriba y tiene un mínimo, y si es negativo abre hacia abajo y tiene un máximo. Este punto crítico es donde se alcanza el máximo o mínimo y viene dado por la fórmula

$$x = \frac{-b}{2a}$$



Recuperado <https://www.fisicalab.com/apartado/ecuacion-parabola-vertical> en junio, 2024.

Ejemplo:

Para que no haya pérdidas en un espectáculo, se requiere que asistan 300 espectadores que paguen \$500 pesos. Se ha observado que por cada espectador extra es posible cobrar una unidad de dinero menos. ¿Con cuántos espectadores adicionales se puede obtener las máximas ganancias?

Solución. Para ello, primero hay que nombrar la variable con alguna literal, por ejemplo, x =número de espectadores adicionales. Luego, determinar el ingreso $I(x)$ de x adicionales. El ingreso I es igual al número de espectadores multiplicado por el costo de un boleto, por ejemplo, si no hay espectadores adicionales $I(0)$ el ingreso sería $300 * 500 = 150\,000$. Con un espectador adicional sería

$$I(1) = (300 + 1)(500 - 1) = 150\,199$$

Con x espectadores adicionales

$$I(x) = (300 + x)(500 - x), \quad 0 \leq x \leq 500$$

Para que el ingreso no sea negativo debe ser $500 - x \geq 0$, o sea $x \leq 500$

Vamos a realizar la multiplicación de estos binomios $(300 + x)(500 - x)$

$$I(x) = 150\,000 - 300x + 500x - x^2$$

$$I(x) = 150\,000 + 200x - x^2$$

Reordenando los términos $I(x) = -x^2 + 200x + 150\,000$. Vemos que el signo de la x^2 es negativo, por lo cual sabemos que la función tiene un máximo

Los coeficientes de la función cuadrática son

$$a = -1, \quad b = 200, \quad c = 150\,000$$

Como ya hemos estudiado anteriormente, el punto crítico está dado por $x = \frac{-b}{2a}$. Sustituyendo tenemos

$$x = \frac{-200}{2(-1)} = 100$$

Como este valor está dentro el dominio $0 \leq x \leq 500$, concluimos que este es el valor que permite obtener el máximo ingreso.



TABASCO

"Educación que genera cambio"



COBATAB
COLEGIO DE BACHILLERES
DE TABASCO

CATEGORIAS

PM3 - SA1 ACT 02

ACTIVIDAD DE REFORZAMIENTO:
PROBLEMARIO DE MAXIMOS Y
MINIMOS.

C3. Solución de problemas y modelación
C4. Interacción y lenguaje matemático.

Instrucciones: Con el acompañamiento de tu profesor, lee con detenimiento cada problema, plantea la función cuadrática que lo modela y encuentra el punto de optimización.

1. **Ejercicio propuesto.** El propietario de un edificio de apartamentos con 60 habitaciones puede alquilarlas todas si fija un precio de \$2000 pesos por habitación. Con un alquiler más alto, algunas habitaciones quedarían vacías. En promedio por cada incremento de alquiler de \$50 pesos, una habitación quedaría vacía, sin posibilidad alguna de alquilarse. ¿Qué alquiler mensual maximizará el ingreso total?

Solución.

SESIÓN 04

Progresión 3

Operaciones con funciones

¡Las operaciones con funciones son como un emocionante rompecabezas matemático, se relacionan entre si conformando a su vez nuevas funciones, imagina que eres un arquitecto de ecuaciones, construyendo y combinando funciones para resolver problemas del mundo real.

Cada función es como una pieza única, pero todas encajan de manera especial en un problema determinado. Al sumar, restar, multiplicar o dividir funciones, estás creando herramientas poderosas para modelar fenómenos naturales, optimizar procesos y tomar decisiones informadas. Así que, ¡adelante! Sumérgete en el mundo de las funciones y descubre cómo estas piezas matemáticas se unen para formar algo más grande y fascinante.

Recuerda que las operaciones con funciones no solo son útiles en matemáticas, sino también en campos como la física, la economía, la ingeniería y la ciencia de datos. Así que, ¡prepárate para explorar, experimentar y desbloquear soluciones creativas.

¿Qué operaciones se pueden hacer con las funciones?

Como sabemos las funciones están definidas por expresiones algebraicas como son monomios, binomios y polinomios, de tal manera que, considerando respectivamente el dominio de las funciones, las operaciones básicas que podemos realizar con ellas son: sumas, restas, multiplicación y división. Es decir, dos funciones pueden ser sumadas, restadas, multiplicadas, o divididas.

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones la notación de las operaciones son las siguientes:

Suma	$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
Resta	$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
Multiplicación	$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
División	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$



TABASCO

"Educación que genera cambio"



COBATAB
COLEGIO DE BACHILLERES
DE TABASCO

Suma de funciones

La suma de operaciones se calcula sumando los valores correspondientes de las funciones originales obteniendo una nueva función. Se expresa de la siguiente manera:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

El dominio de la suma de dos funciones es la intersección del dominio de cada una de las funciones.

$$\text{Dom}(f + g) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$$

Ejemplo

Dadas las funciones: $f(x) = 10x^2 + 5x - 3$ y $g(x) = 4x + 15$, obtener la suma:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f + g)(x) = (10x^2 + 5x - 3) + (4x + 15)$$

$$(f + g)(x) = 10x^2 + 9x + 12$$

Resta de funciones

La resta de operaciones se calcula restando los valores correspondientes de las funciones originales obteniendo una nueva función. Se expresa de la siguiente manera:

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

Igual que con la función suma, el dominio de la resta de dos funciones es equivalente a la intersección del dominio de cada función.

$$\text{Dom}(f - g) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$$

Ejemplo

Sean $f(x) = 12x + 6$ y $g(x) = 7x + 15$ dos funciones, calcular la resta:

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f - g)(x) = (12x + 6) - (7x + 15)$$

$$(f - g)(x) = 12x + 6 - 7x - 15$$

$$(f - g)(x) = 5x - 9$$

Multiplicación de funciones

Para calcular el producto o (multiplicación) de dos funciones, simplemente debemos multiplicar las expresiones de cada función.

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

El dominio de la función producto es el conjunto intersección del dominio de cada función multiplicada.

$$\text{Dom}(f \cdot g) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$$

Ejemplo

Obtener la multiplicación de las funciones $f(x) = 2x^2 - 9$ y $g(x) = 5x - 4$:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = (2x^2 - 9) \cdot (5x - 4)$$

$$(f \cdot g)(x) = 10x^3 - 8x^2 - 45x + 36$$

División de funciones

El resultado de la operación de división de funciones es el cociente de dos funciones. Dicha operación se expresa de la siguiente forma:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

El dominio de la división de dos funciones es el conjunto intersección del dominio de cada función, excepto todos los valores de x que anulen $g(x)$ que actúa como divisor, es decir que $g(x) \neq 0$ ya que si no obtendríamos una indeterminación.

$$\text{Dom}\left(\frac{f}{g}\right) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) - \{x : g(x) = 0\}$$



TABASCO

"Educación que genera cambio"



COBATAB
COLEGIO DE BACHILLERES
DE TABASCO

Ejemplo

Realizar la división de las siguientes funciones $f(x) = 3x^2 + 2x - 8$ y $g(x) = 2x - 3$:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{3x^2 + 2x - 8}{x + 2}$$

$$\begin{array}{r} 3x - 4 \\ x + 2 \overline{) 3x^2 + 2x - 8} \\ \underline{-3x^2 - 6x} \\ -4x - 8 \\ \underline{4x + 8} \\ 0 \end{array}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = 3x - 4$$

Consulta los siguientes videos de apoyo:

Para aprender más:



YouTube:
Operaciones con Funciones

Para aprender más:



YouTube:
OPERACIONES con
Funciones  Suma, Resta,
Multiplicación y División

CATEGORIAS

PM3 - SA1 ACT 03

ACTIVIDAD DE REFORZAMIENTO

C1 Procedural

C2 Procesos de intuición y razonamiento.



Instrucciones: Con apoyo de la lectura "Operaciones con funciones" y los videos para cada operación, completar la tabla comparativa de operaciones con funciones.

Tabla comparativa de operaciones con funciones				
Operación	Suma	Resta	Multiplicación	División
Funciones	$f(x) = 6x^2 + 2x + 3$ $g(x) = x^2 - 3x + 5$	$f(x) = 2x^2 + 2x + 3$ $g(x) = -6x + 9$	$f(x) = 2x - 3$ $g(x) = -4x + 5$	$f(x) = 6x^2 + 19x + 15$ $g(x) = 2x + 3$
Notación Matemática	$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$			
Procedimiento				
Resultado				

SESIÓN 05

Funciones reales de variable real

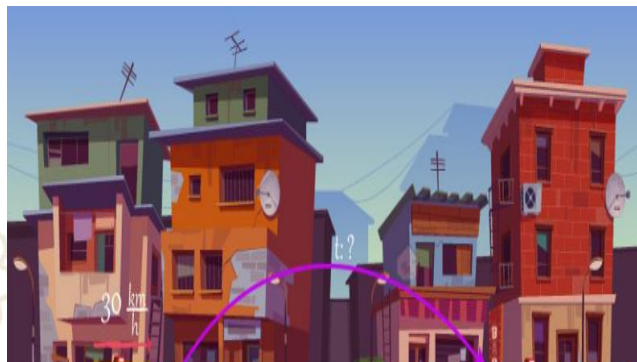
En situaciones que vivimos diariamente nos surge curiosidades como:

¿Cuál es el volumen del postre que comeremos hoy?

¿La distancia que recorreremos diariamente para transportarnos a la escuela?

Al tirar la basura al bote o el balón a la canasta, ¿Cómo podemos describir el movimiento que realiza?

¿Cuál es el volumen de la naranja o la manzana que comeremos hoy?



Obtenido de $t=d/v$ Tomado de <https://calculadorafisica.online/es/definicion/mru.html> en junio, 2024.

Es posible representar estos casos de manera simplificada, mismos que nos ayudaran a comprender su comportamiento, esto se realiza a través de un modelo.

Modelos matemáticos

De acuerdo con (Bocco M, 2010); un modelo es una representación gráfica, esquemática o analítica de una realidad, que sirve para organizar y comunicar de forma clara los elementos que la conforman y sus relaciones.

Este mismo autor menciona que un modelo matemático es la representación simplificada de la realidad, mediante el uso de funciones que describen su comportamiento, o de ecuaciones que representan sus relaciones. Las funciones tienen diversas aplicaciones en situaciones de la vida cotidiana, en diversas ciencias o áreas de conocimiento como física, biología, matemáticas, economía, etc.

Modelos matemáticos en la sociedad

$$I = p \cdot q$$



Obtenido de NEGOCIOS UCAB en junio, 2024.

Los ingresos I de una empresa se calculan por el número de unidades vendidas (q) multiplicadas por el precio al que se venden (p).

En criminalística es necesario saber desde que lugar se efectuó el disparo, las balas al ir tan rápido, tiene una trayectoria recta y no disminuye mucho la velocidad, por lo tanto, se usa en distancias cortas para para calcular la distancia en el que fue disparado el proyectil.



Obtenido de Colegio criminalista de Chile en junio, 2024

Modelos matemáticos en nuestro contexto

Analizamos los siguientes casos de ejemplo:

1.- Para las olimpiadas organizadas por el COBATAB, en la que participan distintas escuelas del Estado, se realizaron distintivos para identificar los distintos colegios participantes. La cantidad de distintivos vendidos se modela con la función $C(p)$ donde p es el precio (en pesos) a los que se ofrecen los distintivos:

$$C(p) = 3.613 - p^2 - 2p$$

Mediante este modelo matemático, responde a las siguientes preguntas:

- ¿Para qué valores de p se puede definir la función $C(p)$?
- ¿Cuántos distintivos se vendieron si se cobraron a \$50?

a) Solución:

$C(p)$ = Cantidad de distintivos vendidos.

p = precio de cada distintivo.

Ordenamos la función $C(p)$ de mayor exponente al menor:

$$C(p) = -p^2 - 2p + 3.613$$

Emplearemos la formula general para encontrar los valores de p en los que este definida la función. Quedando de la siguiente forma:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$a = -1 \quad b = -2 \quad c = 3.613$$

Realizando la sustitución de estos valores en la formula, tenemos:

$$p = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(-1)(3.613)}}{2(-1)} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 14.452}}{-2} = \frac{2 \pm \sqrt{14.456}}{-2}$$

Se obtiene los siguientes resultados:

$$p_1 = \frac{2 + 120.23}{-2} = -61.115$$

$$p_2 = \frac{2 - 120.23}{-2} = \frac{-118.23}{-2} = 59.115$$

Dado que p representa el precio de los distintivos y no puede existir un precio negativo, el valor que puede tomar p es 8.226 y puede oscilar entre $0 \leq p \leq 59.115$.

b) Solución:

Cuando $p = \$50$, sustituyendo en la función:

$$c(50) = 3,613 - (50)^2 - 2(50) = 3,613 - 2500 - 100 = 1,013.$$



TABASCO



COBATAB
COLEGIO DE BACHILLERES
DE TABASCO

"Educación que genera cambio"

2.- Pablo vive en la Villa y sale en bicicleta a las 6: 00 am para llegar a su escuela a las 6:30 h; el cual está a 3 km de su casa, y viaja a una velocidad constante de 100 metros por minuto.

- Determina la función lineal d que modele los datos.
- ¿Pablo llegara a tiempo a su clase?, es decir, antes de las 6:30.

a) Solución:

Datos que nos proporciona el problema:

3 km equivale a 3,000 m.

Recorre 100m por minuto.

En 30 minutos recorrerá 3, 000 m.

Observemos la siguiente tabla donde se desglosa el recorrido de Pablo.

T	d	Falta por recorrer
1 min	100m	2,900 m
2 min	200 m	2, 800 m
3 min	300 m	2, 700 m
...		
20	2, 900 m	100m
30	3,000 m	0 m

Observe como cambia los datos, conforme avanza Pablo disminuye la distancia a recorrer, es decir, se va acercando a su escuela.

De aquí que la función que modela esta situación en función del tiempo queda:

$$d(t) = -100t + 3,000$$

b) Solución:

Pablo llegara a tiempo a su clase puesto que con esa velocidad alcanzara a recorrer la distancia que lo separa de la escuela en 30 minutos exactamente, como lo podemos ver en la última fila de la tabla.

Revisa el siguiente video en el que encontraras diversas aplicaciones de las funciones.

Para aprender más:



YouTube:
LAS FUNCIONES EN LA
VIDA COTIDIANA



TABASCO

"Educación que genera cambio"



COBATAB
COLEGIO DE BACHILLERES
DE TABASCO

CATEGORIAS

PM3 - SA1 ACT 04

ACTIVIDAD DE REFORZAMIENTO

C1 Procedural

C2 Procesos de intuición y razonamiento.



Instrucciones: Encuentra la solución de los siguientes problemas aplicado a situaciones cotidianas, obteniendo la función que modela la situación.

1.- Un modelo matemático para describir la distancia recorrida (d) por un objeto pesado que es arrojado en caída libre desde cierta altura en cada tiempo (t) está representado por la función:

$$d(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

Donde g es la aceleración constante determinada por la gravedad en la superficie terrestre (aproximadamente $g = 9.8 \text{ m/s}^2$), y el objeto carece de velocidad inicial.

Se deja caer una piedra desde lo alto de un edificio con una altura de 39m, **¿Calcula el tiempo que tarde en tocar el suelo?**

2.- Elena suele practicar el deporte de ciclismo y practica todos los días durante la mañana, inicia su viaje con una aceleración constante de 0.45 m/s^2 , transcurren 20 segundos y de pronto un niño se atraviesa y comienza a desacelerar de forma constante con una desaceleración de -1.125 m/s^2 hasta que se detiene.

- Calcula la velocidad que obtiene hasta que comienza a frenar. Recuerde que la ecuación de la velocidad está dada por $v = v_0 + at$
- Calcula el tiempo que toma en frenarse totalmente.



TABASCO



COBATAB
COLEGIO DE BACHILLERES
DE TABASCO

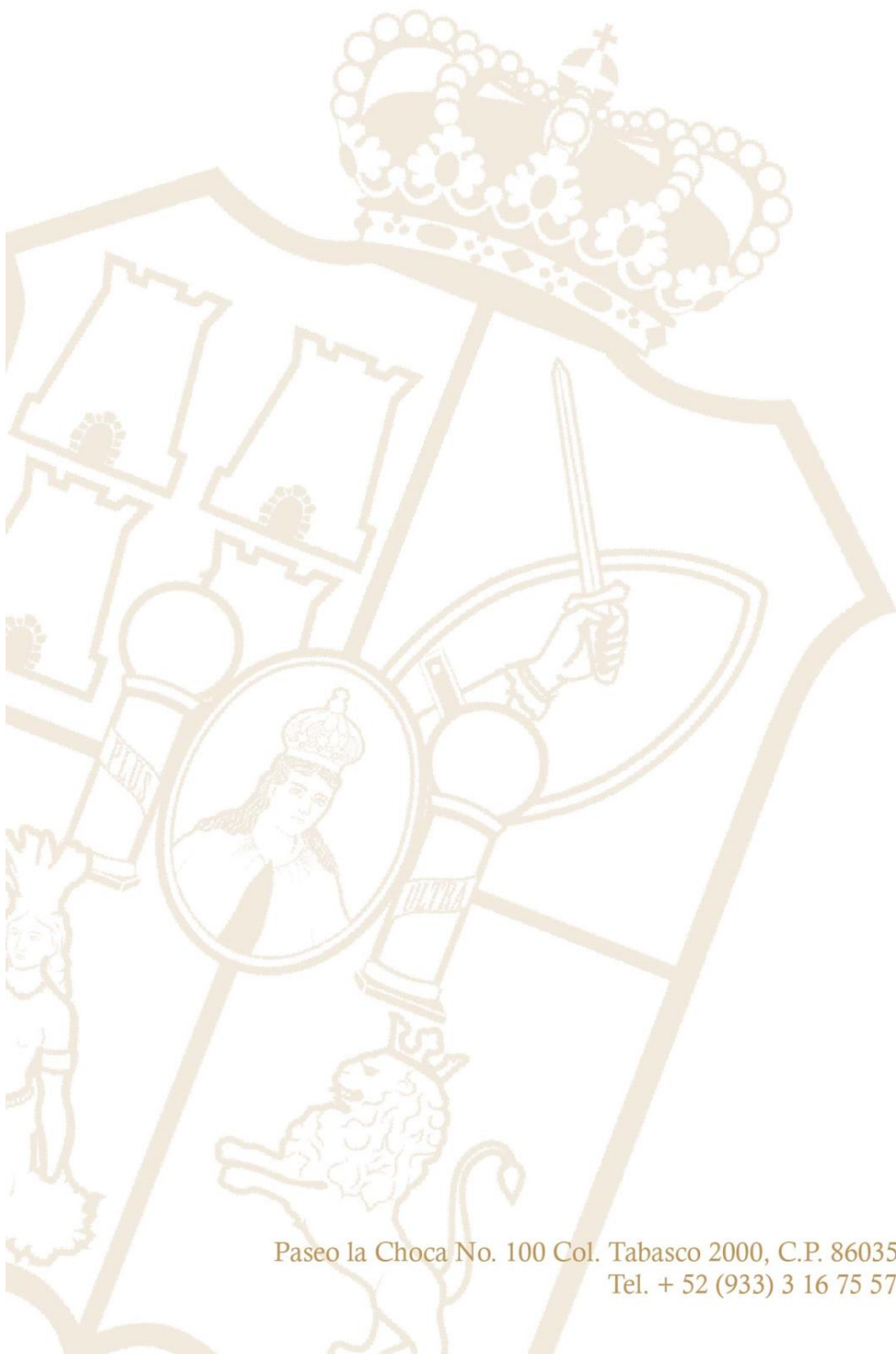
"Educación que genera cambio"

3.- Un agricultor recoge 20 kilos de maíz cada hora y demora media hora para prepararse antes de iniciar la jornada. La función lineal que representa la situación es:

$$y = 20x - 10$$

donde y representa los kilos de maíz recogido y x el tiempo transcurrido en horas.

¿Cuántos kilos de maíz se recogerá en una jornada de 8 horas?





TABASCO

"Educación que genera cambio"



COBATAB
COLEGIO DE BACHILLERES
DE TABASCO

CATEGORIA

PM3-SA1 T01

Tarea 1: Infografía (extraclase)

C3: Solución de
modelación

problemas y



Instrucciones: Elabora una infografía donde dé a conocer la aplicación de las funciones en la vida real, su ecuación, su uso e importancia.



TABASCO

COBATAB
COLEGIO DE BACHILLERES
DE TABASCO

"Educación que genera cambio"

PM3-SA1-LC02 Tipo de instrumento para evaluar TAREA 01: "Infografía de funciones"

Unidad de aprendizaje	Pensamiento Matemático III	Grupo:		Fecha:	
Progresión	3. Revisa situaciones y fenómenos donde el cambio es parte central en su estudio, con la finalidad de modelarlos aplicando algunos conocimientos básicos de funciones reales de variable real y las operaciones básicas entre ellas.				
Meta	M1: Selecciona un modelo matemático por la pertinencia de sus variables y relaciones para explicar una situación, fenómeno o resolver un problema tanto teórico como de su contexto				
Categorías	C3 Solución de problemas y modelación.	Subcategorías	S1 Uso de modelos.		
Nombre de los integrantes					
TAREA 01:					
Aprendizajes Trayectoria				Contenidos Específico	
Modela y propone soluciones a problemas tanto teóricos como de su entorno, empleando lenguaje y técnicas matemáticas.				Demostrar el uso de las funciones reales en problemas: Problema del movimiento, caída libre, crecimiento en función del tiempo.	
CRITERIOS				%	CUMPLE
					SI
					NO
					Puntaje
1.	Entrega su producto terminado en el tiempo establecido por el facilitador.			10	
2.	La infografía presenta al menos 3 funciones de uso real anotando su función.			30	
3.	La infografía presenta al menos 3 funciones de uso real anotando aplicación.			20	
4.	La infografía presenta al menos 3 funciones de uso real anotando su importancia.			20	
5.	La infografía no tiene errores ortográficos y presenta decoración creativa.			10	
6.	Se relaciona colaborativamente, mostrando disposición al trabajo metódico y organizado.			10	
Calificación					
Aspectos para mejorar:					
					Firma

SESIÓN 06

Progresión 4

Características de las graficas

Hasta ahora hemos visto que las funciones son herramientas matemáticas fundamentales para analizar relaciones entre variables y cómo se relacionan en nuestra vida diaria.

En esta sesión aprenderemos sobre sus características y como estas nos proporcionan información valiosa sobre la forma de la gráfica de la función y su comportamiento.

En muchas ocasiones es de interés localizar el valor máximo de una función. En una función cuadrática cuya gráfica abre hacia abajo este máximo se alcanza en el vértice de la parábola. Alternativamente también se puede estar interesado en el valor mínimo de una función cuadrática cuya gráfica abre hacia arriba.

Juan estaba platicando con su amiga Cecilia que su papá desea cercar un terreno de forma rectangular y que dispone de 48 metros de malla para cercarlo de manera que su área sea máxima. Él tiene la inquietud de saber que longitudes debe tener el espacio para que tenga un área máxima, pero que no recuerda cómo hacerle. Ayúdale para saber ¿Cuáles son las dimensiones de este terreno?

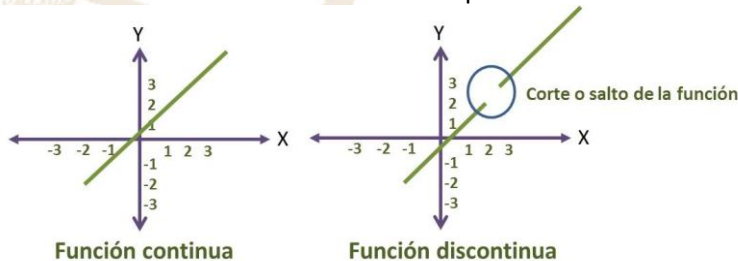
Al mismo tiempo Cecilia le dice: Te imaginarias como construir una caja de cartón que tiene base cuadrada y cada lado de la base mide " x " centímetros. En total las doce aristas miden 160 cm. ¿Cómo determinar el volumen de la caja en función de x ?

Funciones lineales

Las funciones lineales son una parte fundamental de las matemáticas. Una función lineal es aquella que se grafica como una línea recta en un plano cartesiano.

Concepto de Continuidad:

Una función es continua en un intervalo si sus valores no presentan saltos bruscos o interrupciones.

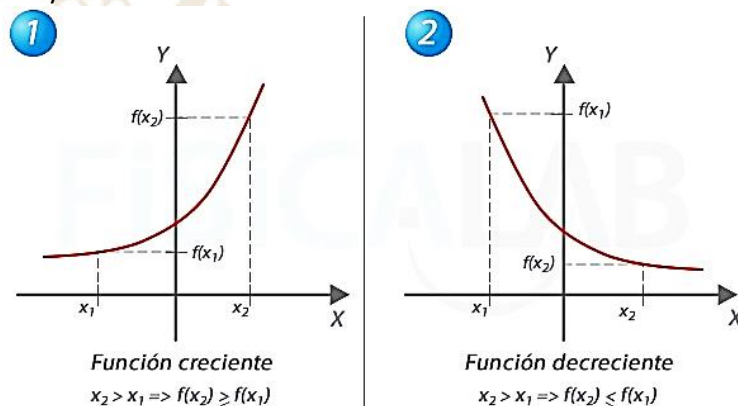


Obtenido de <https://images.app.goo.gl/KzSrQNdNzRMqNrfJ8> en junio, 2024.

Función creciente y decreciente

Se llama función **creciente** cuando a medida que se incrementa el valor de la variable independiente incrementa de igual forma el valor de la función, es decir, a medida que aumenta el valor de x aumenta en el valor de y .

Se llama función **decreciente** cuando a medida que se incrementa el valor de la variable independiente decreta el valor de la función, es decir, a medida que aumenta el valor de x disminuye el valor de y .



Obtenido de <https://images.app.goo.gl/Ldb9Xqvx58ZeVGSQ9> en junio, 2024.

Funciones cuadráticas y cúbicas

Una función $f(x)$ se llama cuadrática si puede ser escrita de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ donde a , b y c son números reales con $a \neq 0$.

El dominio de esta función son todos los reales y su representación gráfica es una parábola. Son innumerable la cantidad de ejemplos prácticos donde está involucrada la función cuadrática, es por ello por lo que merece especial atención.

Crecimiento y decrecimiento para la función cuadrática

Las funciones cuadráticas presentan un tramo en el que son crecientes y otro en el que son decrecientes.

Si $a > 0$, la función $f(x)$ es creciente en el intervalo $(x_v, +\infty)$, y decreciente en el intervalo $(-\infty, x_v)$. Donde x_v = componente del vértice

Si $a < 0$, la función $f(x)$ es creciente en el intervalo $(-\infty, x_v)$, y decreciente en el intervalo $(x_v, +\infty)$.

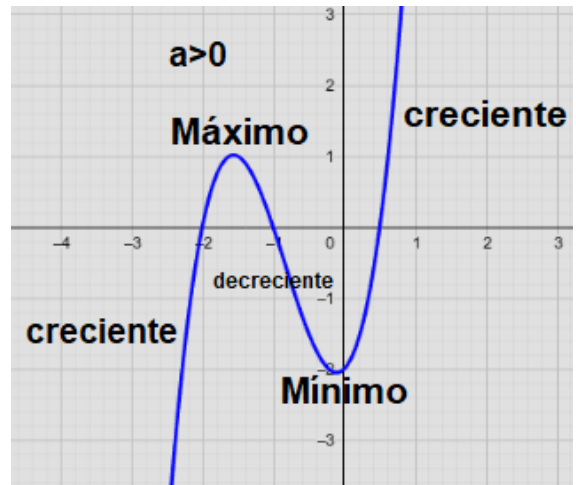
Crecimiento y decrecimiento para la función cubica

La función cúbica es una función polinómica de grado 3. Su expresión matemática es:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

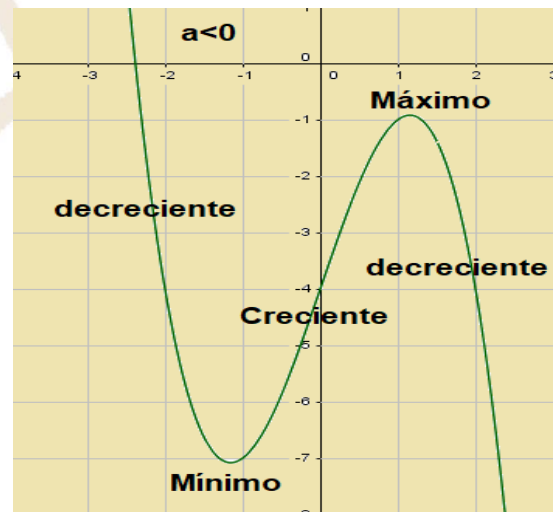
a) Si $a > 0$. Se pueden presentar dos casos:

- Si no tiene extremos, es creciente en todo su dominio.
- Si tiene extremos, la gráfica se divide en tres secciones: la primera (a la izquierda hasta el punto máximo), es creciente; la segunda (parte central, entre máximo y mínimo), es decreciente; y la tercera (a la derecha desde el punto mínimo), es creciente.



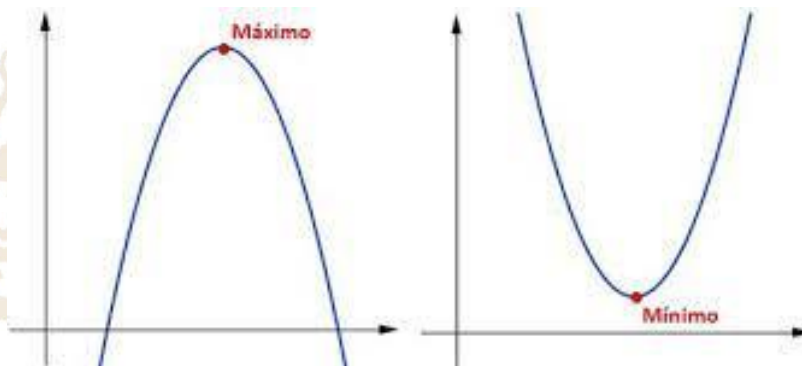
b) Si $a < 0$. También se pueden presentar dos casos:

- Si no tiene extremos, es decreciente en todo su dominio.
- Si tiene extremos, la gráfica se divide en tres secciones: la primera (hasta el punto mínimo), es decreciente; la segunda (entre mínimo y máximo), es creciente, y la tercera (desde el punto máximo), es decreciente.



Conceptos de máximos y mínimos

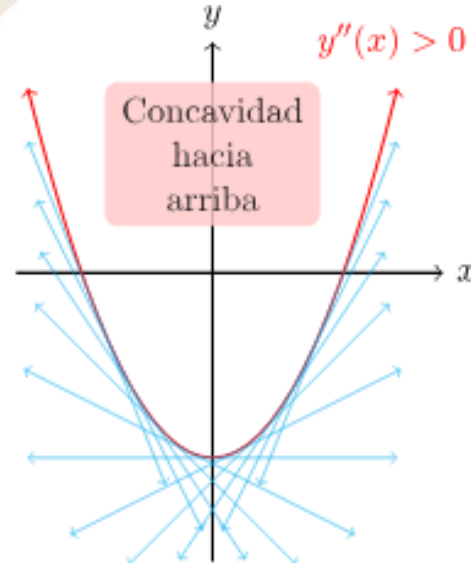
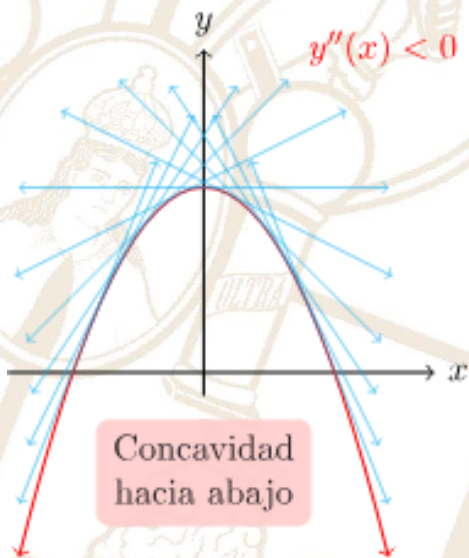
Los **máximos** y **mínimos** de una función representan los puntos más altos y bajos de su gráfica, respectivamente. Un **máximo relativo** ocurre cuando la función cambia de dirección de crecimiento a decrecimiento. Un **mínimo relativo** ocurre cuando la función cambia de dirección de decrecimiento a crecimiento. Los máximos y mínimos absolutos son los puntos más altos y bajos de toda la gráfica de la función.



Obtenido de <https://images.app.goo.gl/16DMbyAKa3q4Z4Zu7> en junio, 2024.

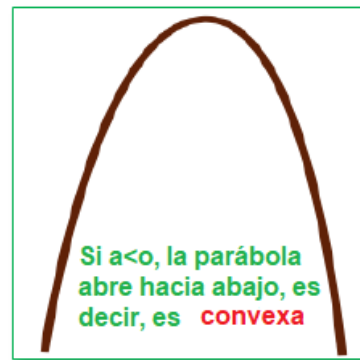
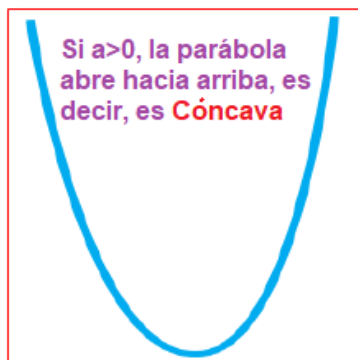
Concepto de Concavidades

La **concavidad** de una función se refiere a la forma en que su gráfica se curva hacia arriba o hacia abajo. Una función es cóncava hacia arriba en un intervalo si su gráfica se curva como una "U" en ese intervalo. Una función es cóncava hacia abajo si su gráfica se curva como una "n" en ese intervalo.



Obtenido de <https://images.app.goo.gl/Zi1J817jtV3JuoXQ7> en junio, 2024.

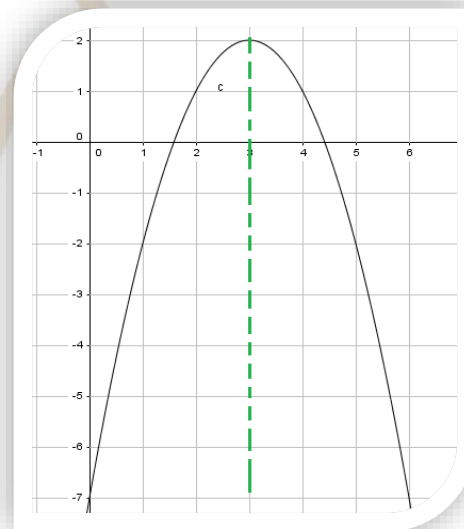
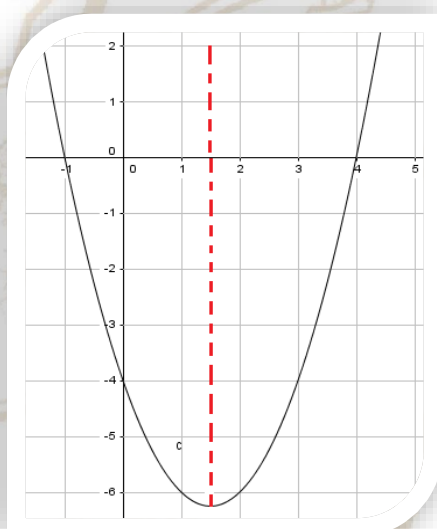
Para identificar qué tipo de **concavidad** tendrá la función cuadrática, basta con observar el coeficiente del primer término (a), es decir el término que tiene la variable elevada al cuadrado. Si $a > 0$ la parábola es cóncava o con ramas hacia arriba. Si $a < 0$ la parábola es convexa o con ramas hacia abajo.



Ejemplos:

1. $f(x) = x^2 - 3x - 4$
 $a = 1 > 0$
 Orientación: **Cóncava**

2. $f(x) = -x^2 + 6x - 7$
 $a = -1 < 0$
 Orientación: **Convexa**





TABASCO

"Educación que genera cambio"



COBATAB
COLEGIO DE BACHILLERES
DE TABASCO

Para identificar qué tipo de **concavidad** tendrá la función **cubica** $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, basta con verificar las siguientes condiciones.

- a) Si $a > 0$, la sección de la izquierda es cóncava, intervalo $(-\infty, x(P_i)]$ y la sección de la derecha es convexa, intervalo $[x(P_i), \infty)$. La expresión $x(P_i)$ significa la abscisa del punto de inflexión P_i . La sección cóncava puede tener un máximo y la sección convexa un mínimo. Un caso que no tiene máximo ni mínimo es $f(x) = ax^3 + d$ pero sí tiene punto de inflexión.
- b) Si $a < 0$, la sección de la izquierda es convexa, intervalo $(-\infty, x(P_i)]$ y la sección de la derecha es cóncava, intervalo $[x(P_i), \infty)$. Al igual que en el caso anterior, la cóncava puede tener un máximo y la convexa un mínimo.

CATEGORIA

PM3 - SA1 ACT 05

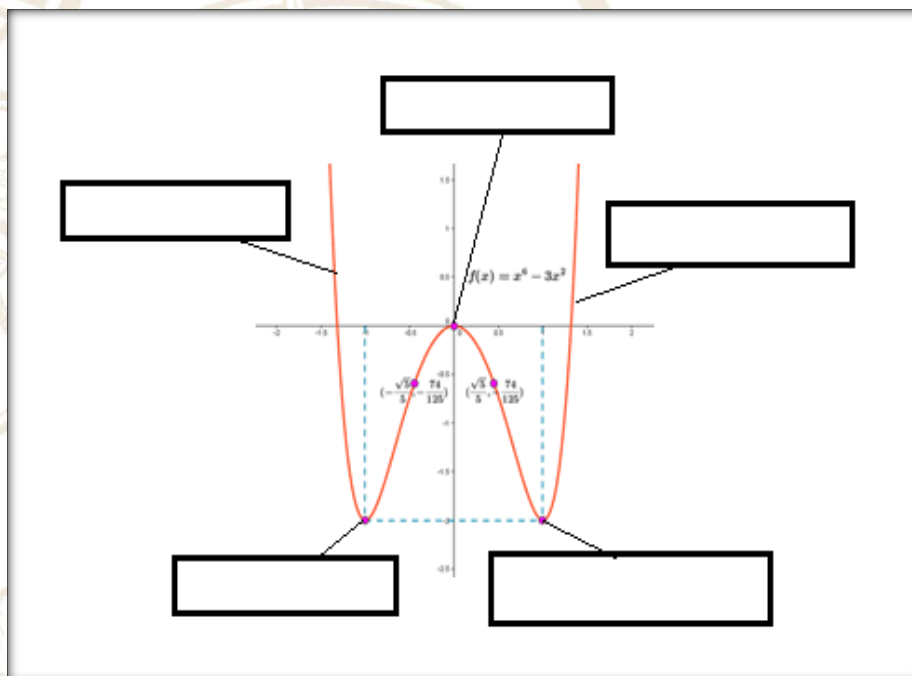
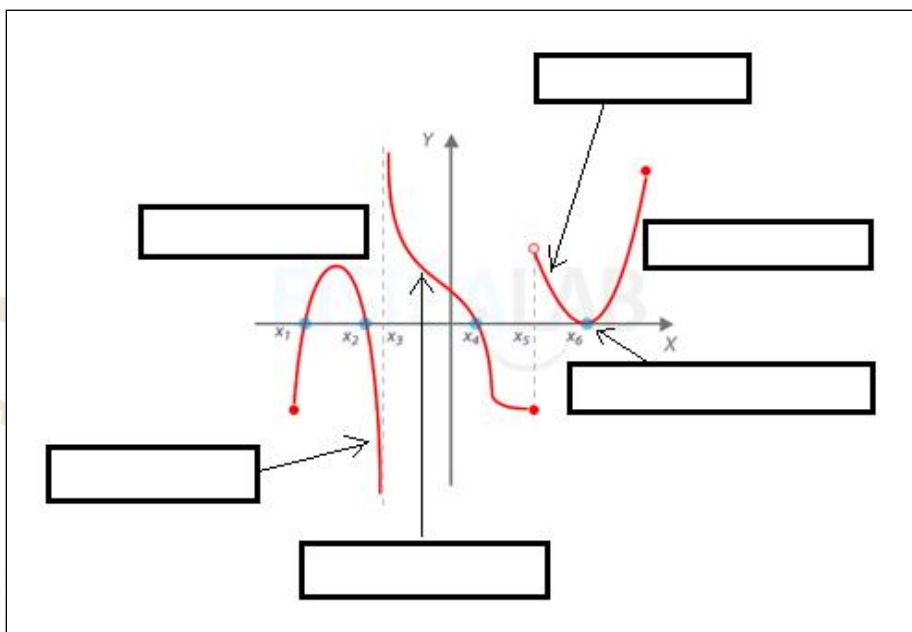
ACTIVIDAD DE REFORZAMIENTO

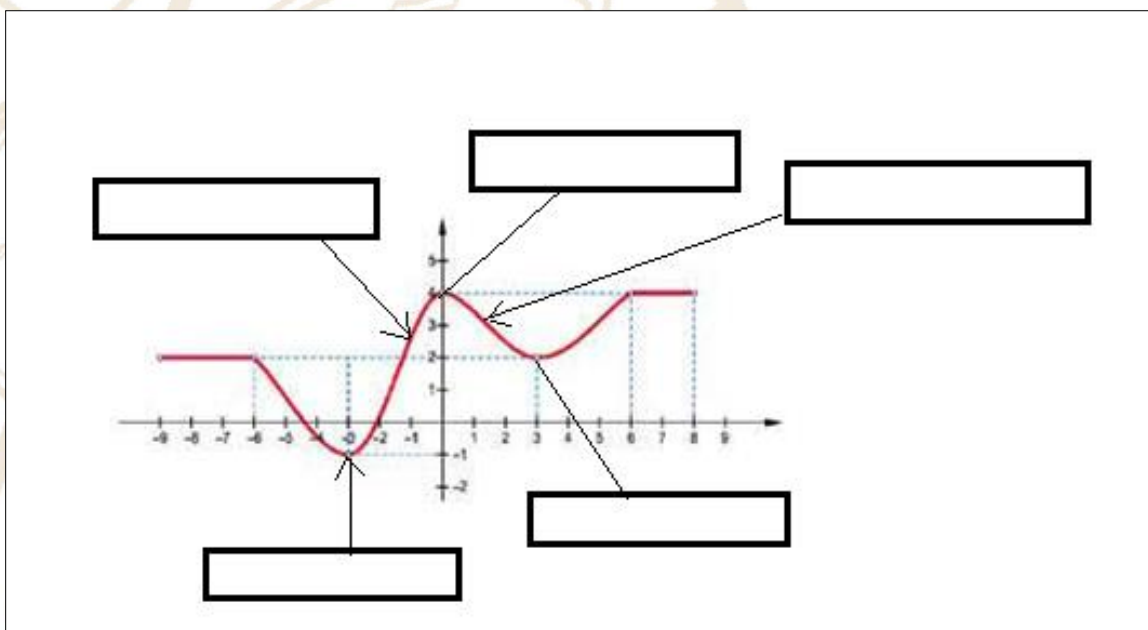
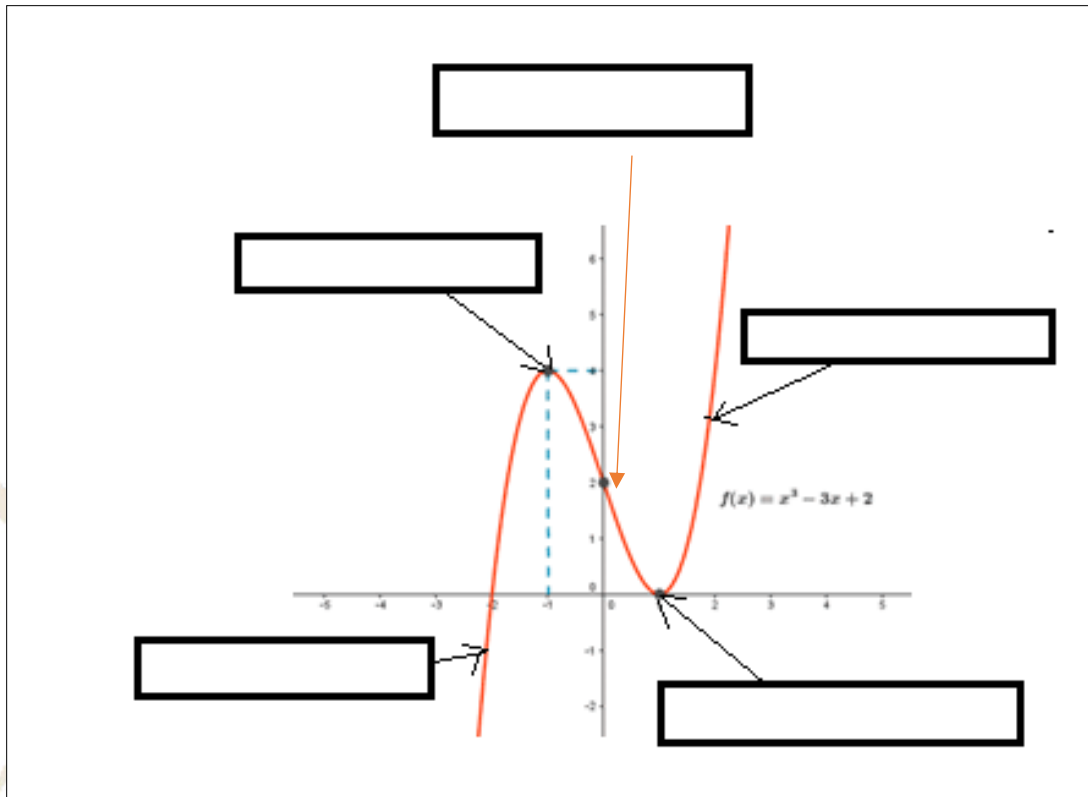
C3: Solución de
modelación

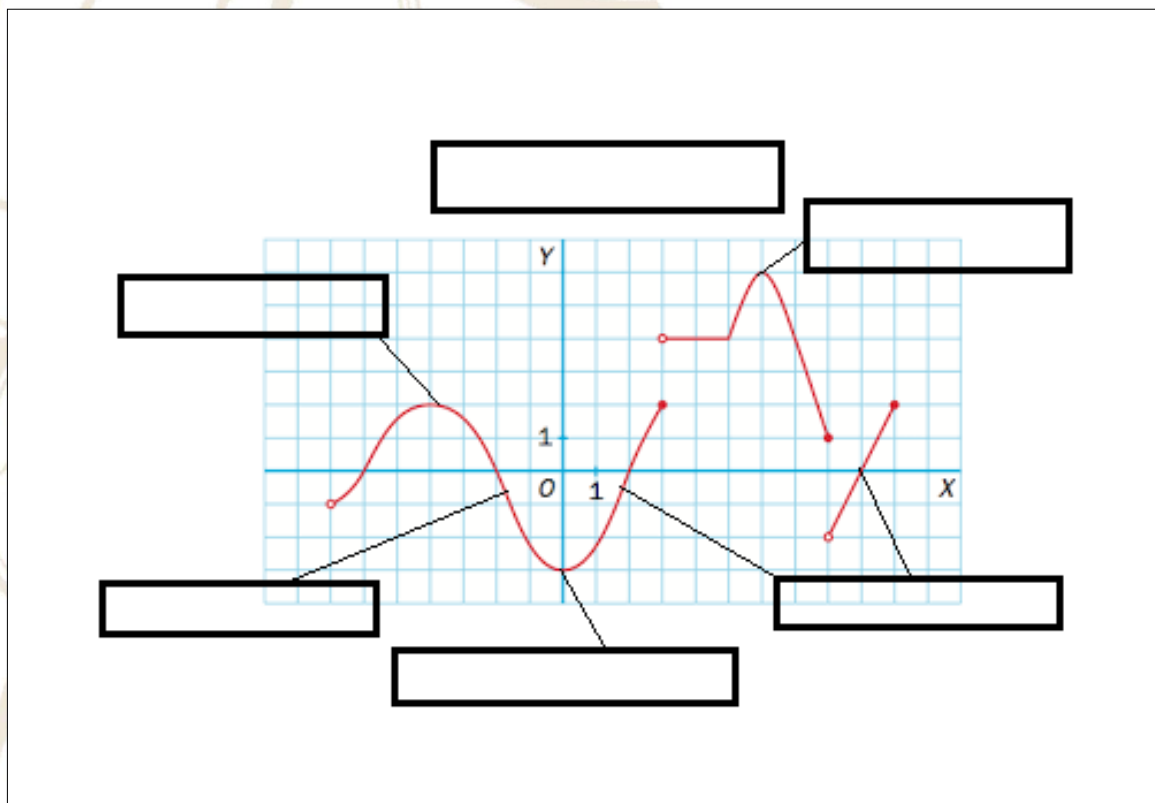
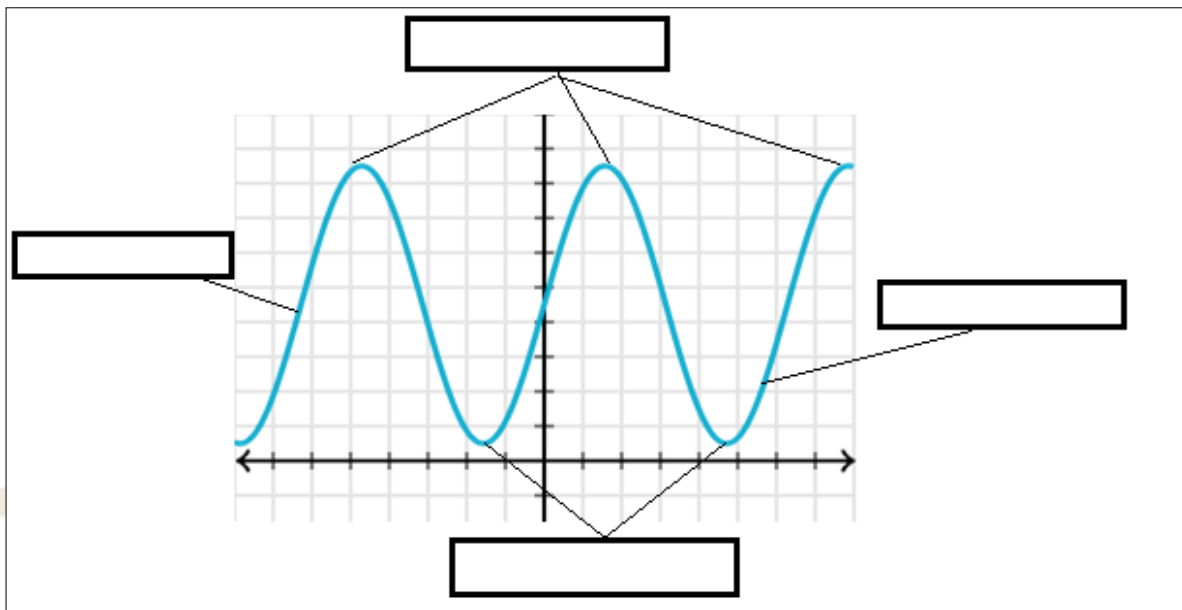
problemas y



Instrucciones: Identifica las características (continuidad, crecimiento, decrecimiento, máximos, mínimos y concavidad) de las siguientes funciones, colocando en cada rectángulo su nombre correspondiente.







SESIÓN 07

Modelado de funciones y análisis de graficas.



A lo largo del tiempo, el hombre ha tenido que adaptarse a los cambios que se presentan en su quehacer diario, pero sobre todo aprender a través del desarrollo del conocimiento.

Por ejemplo, la obtención de los descuentos, la determinación de los índices de masa corporal, a obtener ganancias máximas o mínimas en sus negocios, entre otras cotidianidades, que le permiten hacer uso de los diferentes tipos de funciones.

Es con las funciones que podemos representar estas incidencias del día a día a través de expresiones algebraicas como las de la tabla:

GRADO	FUNCIÓN	EXPRESIÓN ANALÍTICA	EJEMPLO
0	Constante	$f(x) = a$	$f(x) = -1$
1	Lineal	$f(x) = ax + b$	$f(x) = x + 9$
2	Cuadrática	$f(x) = ax^2 + bx + c$	$f(x) = x^2 - 3x - 18$
3	Cúbica	$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$	$f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$

Modelado de funciones

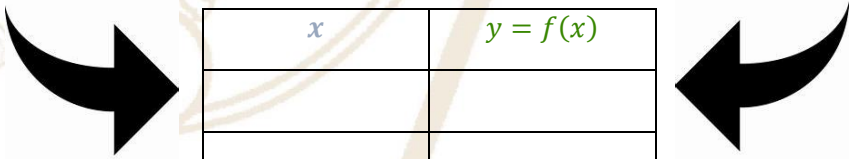
El concepto de función y grafica están firmemente relacionados, pero ¿cómo puedo construir una gráfica si sólo tengo su definición?

Empecemos considerando que existe un conjunto de valores que la satisfacen llamado Dominio. Y, que nos dará como resultado otro conjunto de valores llamado Rango. En palabras más simples, los valores respectivos de la variable x y de la variable y .

Para ello existe una herramienta o estrategia para poder graficar comúnmente conocida como la Tabla de valores. Esta tiene dos entradas como se muestra a continuación:

Variable independiente

Variable dependiente



x	$y = f(x)$

En la primera columna, debes considerar un intervalo de valores que satisfagan la función (dominio), para poder obtener los resultados que serán considerados en la segunda columna (rango).

Modelado de funciones lineales

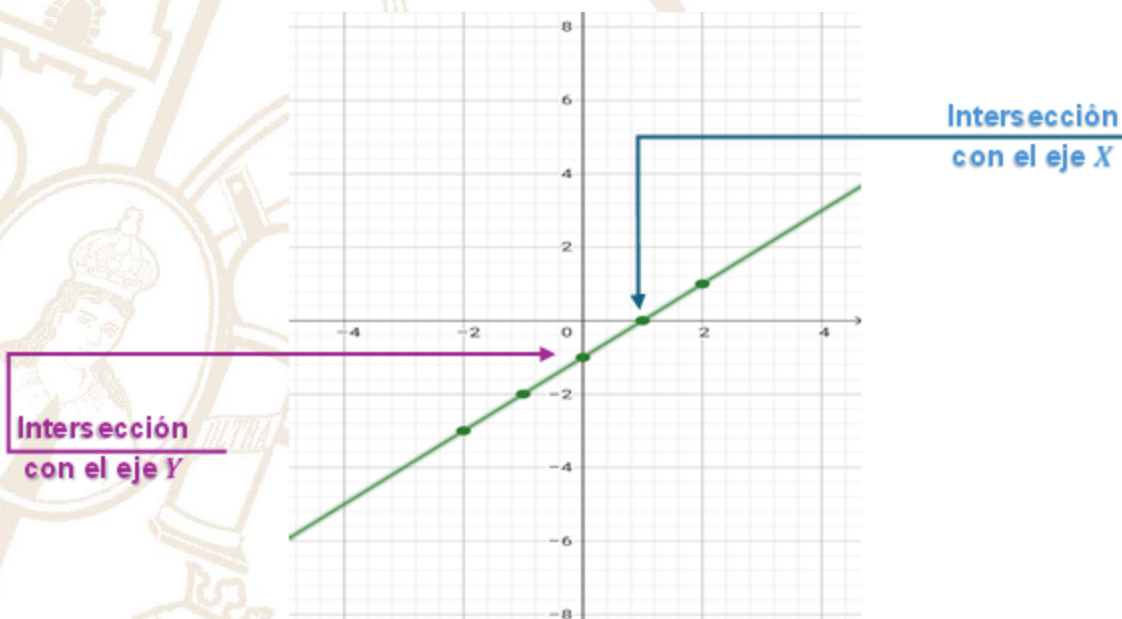
Una función lineal es una ecuación del primer grado de la forma $f(x) = mx + b$ donde m es el valor de la pendiente (razón de cambio) y b el valor de la intersección con el eje y .

Obtengamos la tabla de valores y el grafico de la siguiente función lineal:

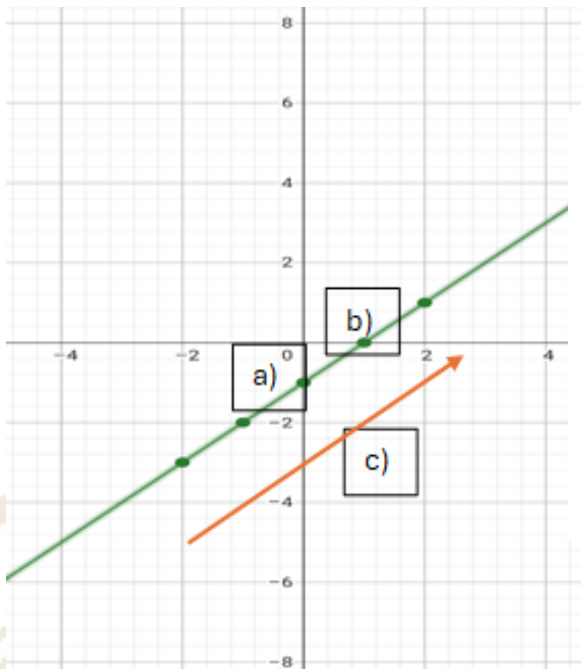
$$f(x) = x - 1$$

x	$f(x) = x - 1$	(x, y)
-2	$y = -2 - 1 = -3$	$(-2, -3)$
-1	$y = -1 - 1 = -2$	$(-1, -2)$
0	$y = 0 - 1 = -1$	$(0, -1)$
1	$y = 1 - 1 = 0$	$(1, 0)$
2	$y = 2 - 1 = 1$	$(2, 1)$

Ahora, como observarás se forman coordenadas o puntos que se pueden ubicar en el plano cartesiano como se muestra en la siguiente imagen:



De la imagen anterior, podemos hacer ciertas observaciones de acuerdo con las características de la función lineal $y = mx + b$ donde m es la pendiente y b , la ordenada al origen:



Características.

- a) Intersección con el eje y $b = -1$.
- b) Intersección con el eje X $x = 1$
- c) Pendiente **positiva** porque la gráfica va ascendiendo de izquierda a derecha.
- d) **Creciente** por tener pendiente positiva.
- e) **Continua** está definida para todos los números reales.
- f) **Grado 1**, por ser función lineal.

Modelado de funciones cuadráticas

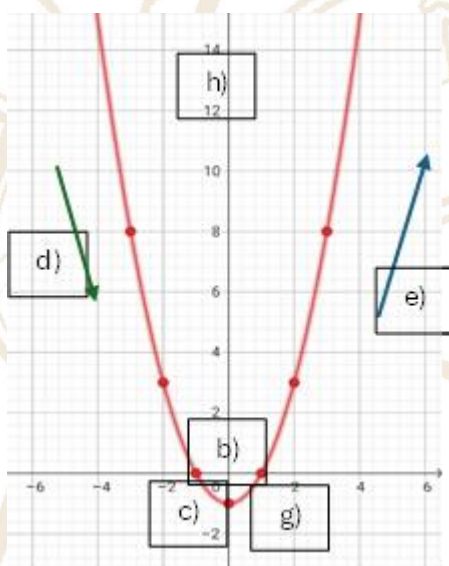
Analicemos ahora, una función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Obtengamos la tabla de valores y el grafico de la siguiente función cuadrática:

$$f(x) = x^2 - 1$$

x	$f(x) = x^2 - 1$	$(x, f(x))$
-3	$f(-3) = (-3)^2 - 1 = 9 - 1 = 8$	$(-3, 8)$
-2	$f(-2) = (-2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3$	$(-2, 3)$
-1	$f(-1) = (-1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$	$(-1, 0)$
0	$f(0) = (0)^2 - 1 = 0 - 1 = -1$	$(0, -1)$
1	$f(1) = (1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$	$(1, 0)$
2	$f(2) = (2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3$	$(2, 3)$
3	$f(3) = (3)^2 - 1 = 9 - 1 = 8$	$(3, 8)$

Y su gráfico es:

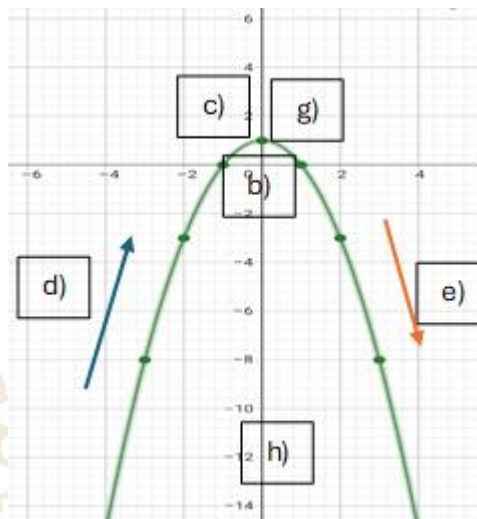


Características.

- a) **Grado 2.**
- b) Intersecciones con el eje X $(-1, 0)$ y $(1, 0)$.
- c) Intersección con el eje Y $(0, -1)$.
- d) **Decrecimiento local** $(-\infty, 0)$.
- e) **Crecimiento local** en el intervalo $(0, \infty)$.
- f) **Continua.**
- g) **Mínimo** en $(0, -1)$.
- h) **Concavidad** positiva.

Un caso similar al ejemplo anterior por ser función cuadrática es el siguiente: Si $f(x) = -x^2 + 1$, entonces la tabla de valores y su gráfica son:

x	$(x, f(x))$
-3	$(-3, -8)$
-2	$(-2, -3)$
-1	$(-1, 0)$
0	$(0, 1)$
1	$(1, 0)$
2	$(2, -3)$
3	$(3, -8)$



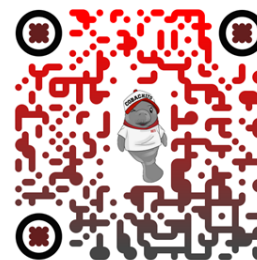
Y dentro de sus características, podemos mencionar:

- a) **Grado 2.**
- b) Intersecciones con el eje X $(-1, 0)$ y $(1, 0)$.
- c) Intersección con el eje Y $(0, 1)$.
- d) **Crecimiento local** en el intervalo $(-\infty, 0)$.
- e) **Decrecimiento local** $(0, \infty)$.
- f) **Continua.**
- g) **Máximo** en $(0, 1)$.
- h) **Concauidad negativa.**

Te invitamos a visualizar el siguiente video de cómo obtener los máximos y mínimos de una función cuadrática.



Para aprender más:



YouTube:
✓ Valores Máximos y
Mínimos de una Función
Cuadrática

Modelado de funciones cúbicas

Analicemos ahora la función polinomial de grado 3 o función cúbica de la cual su forma característica es $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, donde a, b, c y d , son números reales y $a \neq 0$.

Obtengamos la tabla de valores y el grafico de la siguiente función cúbica:

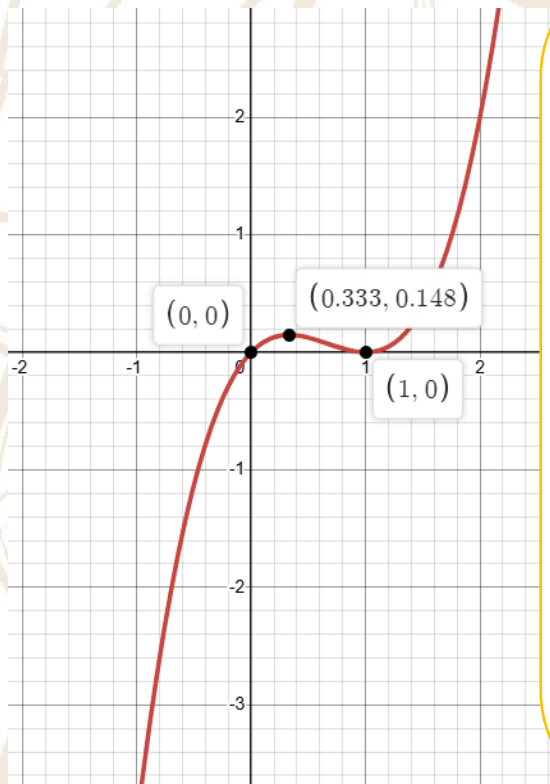
$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x$$

Para aprender más:



YouTube:
6.8 Función cúbica

x	$f(x) = x^3 - 2x^2 + x$	$(x, f(x))$
-3	$f(-3) = (-3)^3 - 2(-3)^2 + (-3) = -27 - 2(9) - 3 = -27 - 18 - 3 = -48$	$(-3, -48)$
-2	$f(-2) = (-2)^3 - 2(-2)^2 + (-2) = -8 - 2(4) - 2 = -8 - 8 - 2 = -18$	$(-2, -18)$
-1	$f(-1) = (-1)^3 - 2(-1)^2 + (-1) = -1 - 2(1) - 1 = -1 - 2 - 1 = -4$	$(-1, -4)$
0	$f(0) = (0)^3 - 2(0)^2 + (0) = 0 - 2(0) + 0 = 0$	$(0, 0)$
1	$f(1) = (1)^3 - 2(1)^2 + (1) = 1 - 2(1) + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$	$(1, 0)$
2	$f(2) = (2)^3 - 2(2)^2 + (2) = 8 - 2(4) + 2 = 8 - 8 + 2 = 2$	$(2, 2)$
3	$f(3) = (3)^3 - 2(3)^2 + (3) = 27 - 2(9) + 3 = 27 - 18 + 3 = 12$	$(3, 12)$



Características:

1. Grado: 3
2. Intersección con el eje x : $(0, 0)$ y $(1, 0)$
3. Intersección con el eje y : $(0, 0)$
4. Máximo local: $(0.333, 0.148)$
5. Mínimo local: $(1, 0)$
6. Concavidad: como $a > 0$, la sección izquierda es cóncava, en el intervalo $(-\infty, 0.333)$ y la sección derecha es convexa, intervalo $[0.333, \infty)$
7. Continuidad: La función es continua en todos los números reales ya que se trata de un polinomio.
8. Crecimiento y decrecimientos locales:
 - En los intervalos $(-\infty, 0.333)$, y $(1, \infty)$ la función es creciente.
 - En intervalo $(0.333, 1)$ la función es decreciente.
9. Dominio: todos los reales, $D_f = \mathbb{R}$
10. Rango: todos los reales. $D_r = \mathbb{R}$

CATEGORIA

PM3 - SA1 ACT 06

ACTIVIDAD DE REFORZAMIENTO

C3: Solución de
modelación

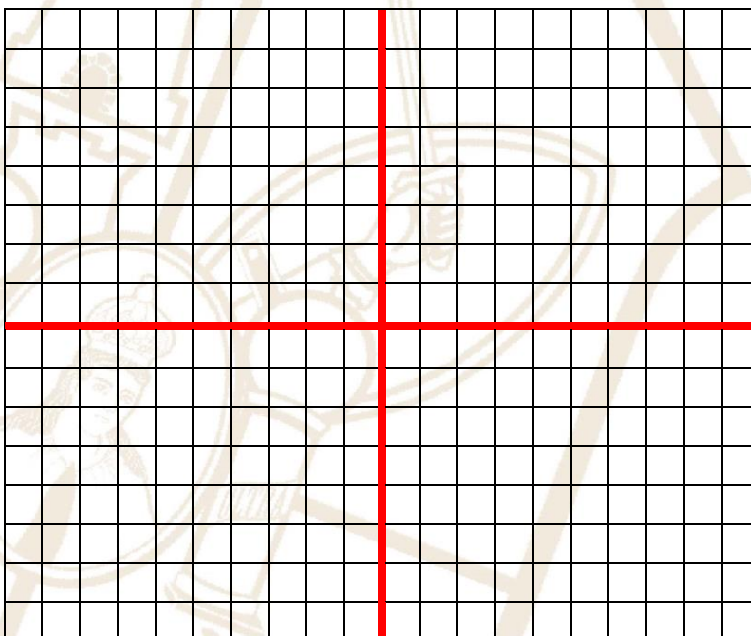
problemas y



Instrucciones: Elabora el modelo de las gráficas de las funciones lineales, cuadráticas y cúbicas propuestas con guía del docente; y, realiza un análisis de las características que presentan.

a) Función lineal

x	$f(x) = -2x + 1$	$(x, f(x))$
-3		
-2		
-1		
0		
1		
2		
3		



- Intersección con el eje Y:

- Intersección con el eje X:

- Pendiente:

- Creciente o decreciente:

- Continuidad:

- Grado de la función:



TABASCO

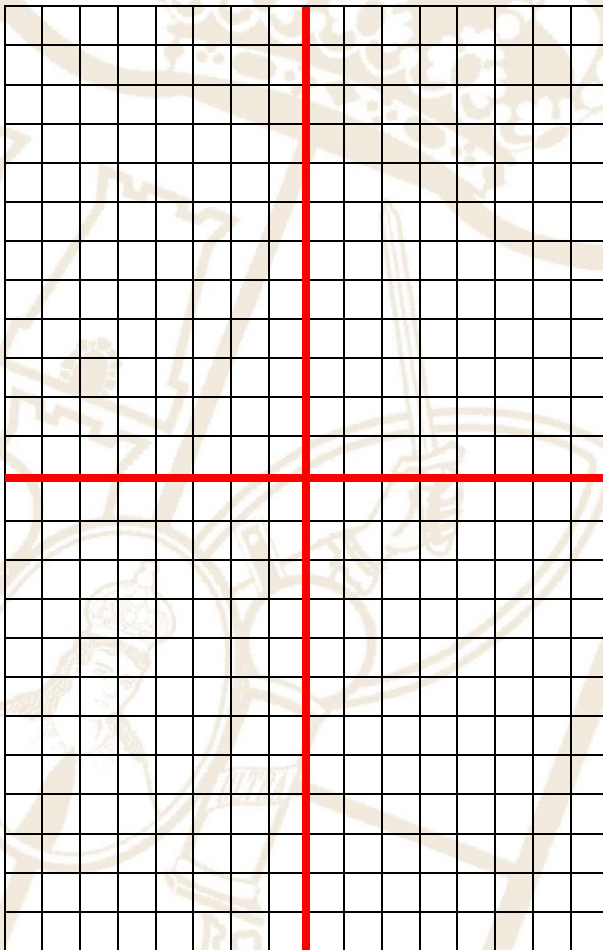


COBATAB
COLEGIO DE BACHILLERES
DE TABASCO

"Educación que genera cambio"

b) Función cuadrática

x	$f(x) = x^2 - 2x - 8$	$(x, f(x))$
-3		
-2		
-1		
0		
1		
2		
3		



i. Grado de la función:

ii. Intersección con el eje X:

iii. Intersección con el eje Y:

iv. Crecimiento local:

v. Decrecimiento local:

vi. Continuidad:

vii. Valor del máximo o
mínimo:

viii. Concavidad:

c) Función cúbica

x	$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$	$(x, f(x))$
-3		
-2		
-1		
0		
1		
2		
3		

i. Grado: _____

ii. Intersección con el eje X: _____

iii. _____

iv. Intersección con el eje Y: _____

v. _____

vi. Máximo local: _____

vii. _____

viii. Mínimo local: _____

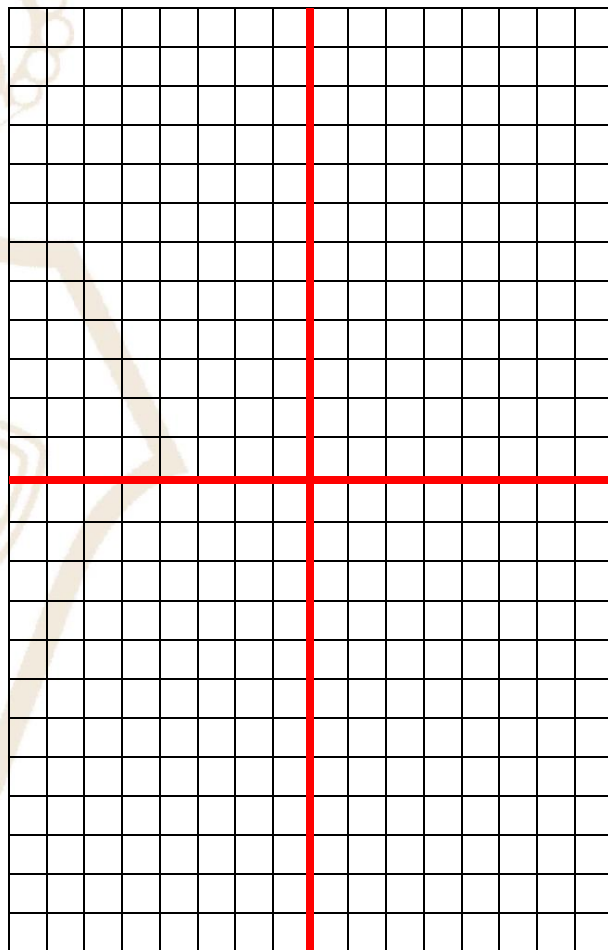
ix. _____

x. Concavidad: _____

xi. Continuidad: _____

xii. _____

xiii. Crecimiento y decrecimiento locales: _____



SESIÓN 08

Progresión 5

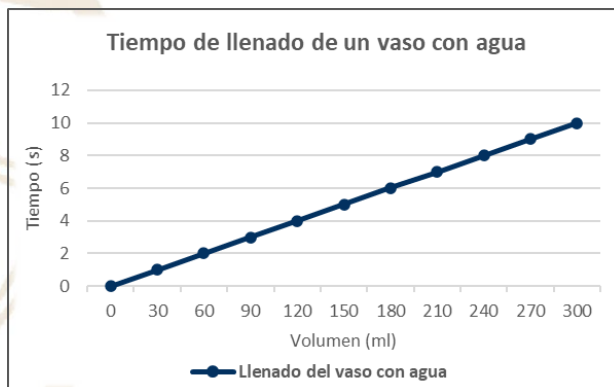
Límites

Límite y función son palabras que proceden etimológicamente del latín "Emanan" del sustantivo "límites" y "función", donde el primero puede traducirse como "frontera o borde" y el otro como función o ejecución (realización de una acción).

Nosotros utilizamos los límites muy frecuentemente, pero no los reconocemos como tales, simplemente porque no estamos acostumbrados a pensar en términos de ellos. Por ejemplo, imagina que tienes que llenar un vaso con agua. Abres el grifo del agua y ésta sale a razón de 30 mililitros por segundo. Sabiendo que la capacidad del vaso es de 300 ml, ¿Cuánto tiempo requiere para llenarlo?

Para dar respuesta a la pregunta planteada, podemos tabular y graficar la información, para observar el comportamiento de los datos.

Tiempo (s)	Volumen (ml)
0	0
1	30
2	60
3	90
4	120
5	150
6	180
7	210
8	240
9	270
10	300



Al representar los datos del tiempo de llenado del vaso y volumen del agua en una tabla (tabulado), podemos ver que cuando $t = 10$ s, se logra el llenado máximo de agua, puesto que la capacidad máxima del vaso es 300 ml.

Y con la representación gráfica de los mismos, podemos notar de manera más clara que, conforme t se acerca a 10 s, el volumen de agua vertido en el vaso va aumentando, es decir, se aproxima cada vez más a 300 ml.

Un límite nos ayuda a describir cómo se comporta una función cerca de un punto, en lugar de analizar ese punto exacto. Veamos más acerca de los límites.

Notación del límite de una función

El límite de una función se puede denotar de 2 formas:

1) $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$

Que se lee: "el límite de una función f , cuando x tiende a C , es L "

2) $f(x) \rightarrow L, \text{ si } x \rightarrow c,$

Que se lee: "la función f en x tiende a L , cuando x tiende a C "

Análisis gráfico de los límites mediante una función a trozos

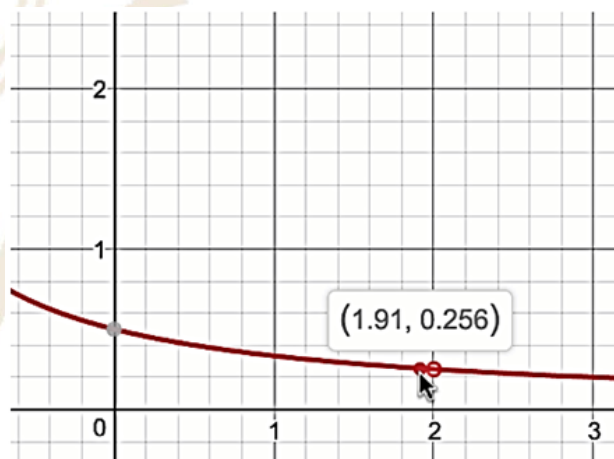
La mejor forma de empezar a razonar sobre los límites es usar gráficas. Aprendamos cómo se analiza un límite gráficamente y estudiemos casos donde el límite no existe.

Hay una diferencia importante entre el valor al que se aproxima una función, que llamamos límite, y el valor de la función en sí. Las gráficas son una buena herramienta para comprender esta diferencia.

Para ello, inspeccionemos el límite:

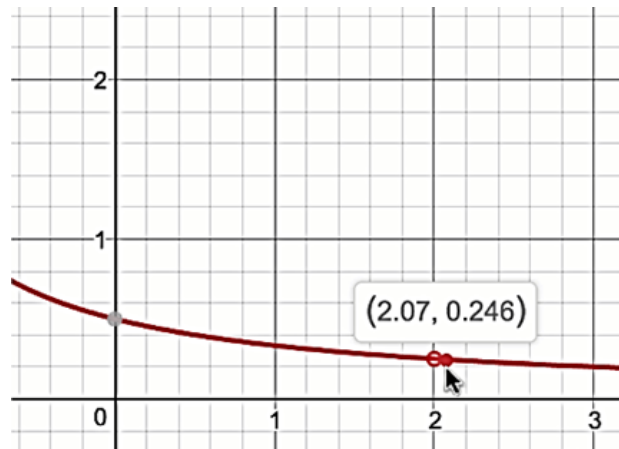
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4}$$

x	$f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$
1.7	0.27
1.8	0.263
1.9	0.256
1.91	0.2558

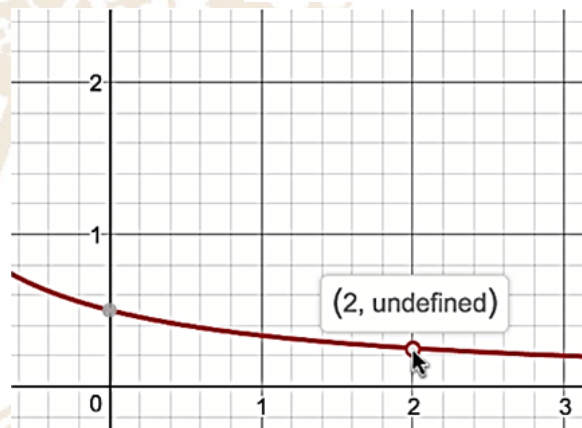


x toma valores que se **aproximen** por la **izquierda**

x	$f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$
2.1	0.2439
2.09	0.2445
2.08	0.2451
2.07	0.2457



x toma valores que se **aproximen** por la **derecha**



$x = 2$ el **valor de la función no está definido**

Observemos cómo, al acercarnos más y más a $x = 2$ tanto por la izquierda como por la derecha, parece que nos aproximamos a $y = 0.25$.

Las **funciones seccionadas, segmentadas o definidas por partes o a trozos**, son funciones que se definen de un modo u otro según el valor que toma la variable x . Veamos un ejemplo:

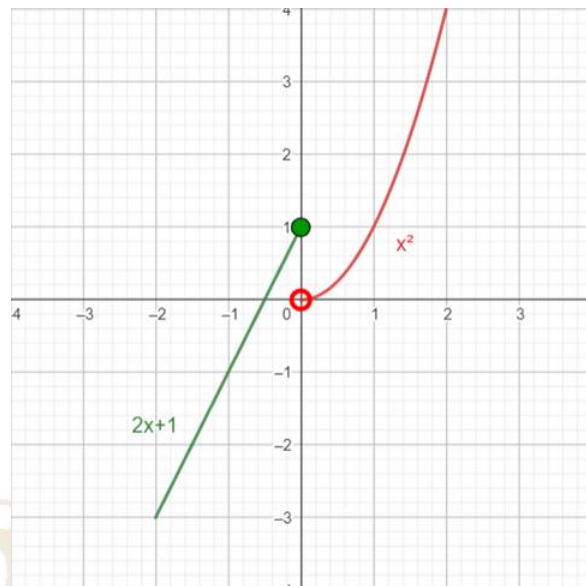
$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

En esta función, si la variable toma un valor menor o igual que 0, la definición de la función es:

$2x + 1$, mientras que si toma un valor positivo la definición de la función es x^2 .

x	$f(x) = x^2$
0	0
1	1
2	4
3	9

x	$f(x) = 2x + 1$
-3	-5
-2	-3
-1	-1
0	1



El punto sólido y el punto vacío de la gráfica indican que el valor que toma f en $x = 0$ es $f(0) = 1$ y no $f(0) = 0$ (porque $x = 0$ pertenece al primer intervalo de la definición de $f(x)$).

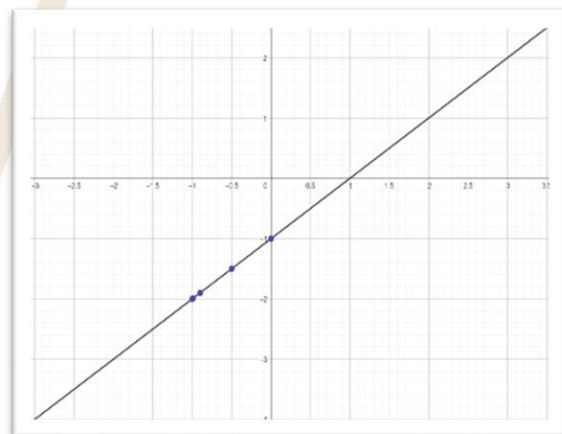
Límites: concepto intuitivo

Sea una función del tipo:

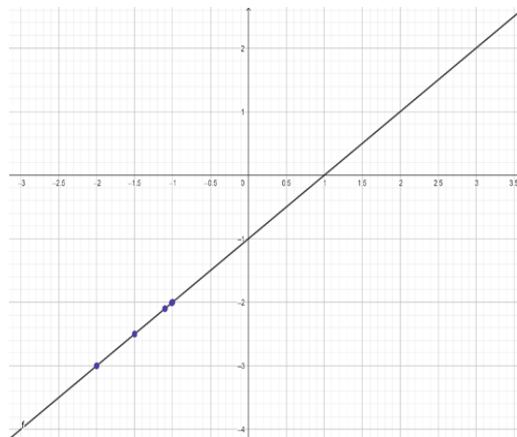
$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$$

Como se puede observar, esta función no está definida para el valor $x = -1$, pues adquiere la forma $\frac{0}{0}$, la cual representa una **indeterminación**. Sin embargo, se puede hacer un análisis acerca de lo que le ocurre a $f(x)$ cuando x se aproxima a -1 . Para ello, se realiza una tabla con valores para " x " en $f(x)$ que se aproximen a -1 , tanto por valores menores como por valores mayores y se realiza la gráfica correspondiente.

x	$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$
0	-1
-0.5	-1.5
-0.9	-1.9
-0.99	-1.99
-0.999	-1.999
$x \rightarrow c$	$\frac{x^2 - 1}{x + 1} \rightarrow -2$



x	$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$
-2	-3
-1.5	-2.5
-1.1	-2.1
-1.01	-2.01
-1.001	-2.001
$x \rightarrow c$	$\frac{x^2 - 1}{x + 1} \rightarrow -2$



De esta manera, aplicando el concepto de límite, tenemos:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(x - 1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x - 1) = -1 - 1 = -2$$

Límites laterales

Son una herramienta desarrollada para dar lugar a las precisiones.

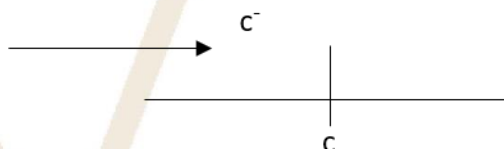
Definición de límites laterales;

Decimos que:

- a) L_1 es el límite de f por la izquierda cuando x tiende a c , y lo representamos por:

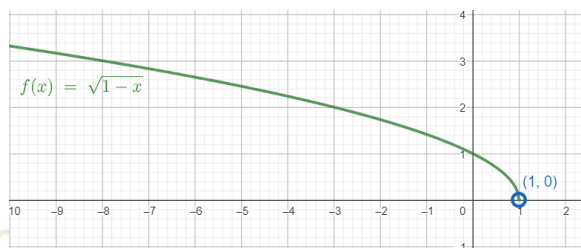
$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L_1$$

Sí conforme se toman argumentos cercanos a C , con $x < c$ (a su izquierda), se observa que también $f(x)$ se aproxima a L_1 .



Estos límites se presentan en las funciones:

$$f(x) = \sqrt{1-x}$$



Donde x debe tomar valores menores a la unidad. El dominio de la función es $(-\infty, 1)$.

Al evaluar el límite de $f(x) = \sqrt{1-x}$, conforme x tiende a 1 por la izquierda, se obtiene:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{1-x} = 0$$

b) L_2 es un límite de f por la derecha cuando x tiende a C , y lo representamos por:

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L_2$$

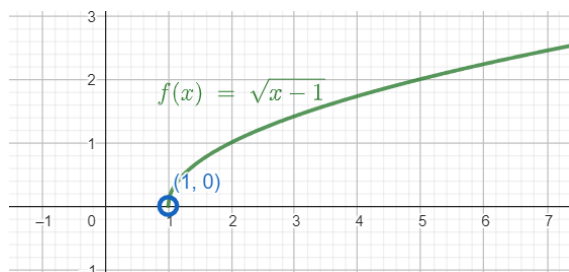
Si conforme x se aproxima a c con $x > c$ (a su derecha), se observa que también $f(x)$ se aproxima a L_2



Este tipo de límites suele presentarse en funciones de tipo:

$$f(x) = \sqrt{x-1}$$

Donde x necesariamente debe tomar valores mayores que la unidad, para que la función tome valores reales. El dominio de la función es $(1, \infty)$.

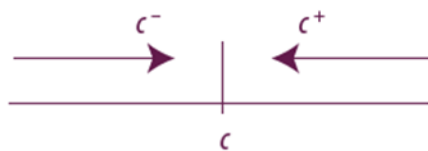


Al evaluar el límite de la función $f(x) = +\sqrt{x-1}$, conforme x tiende a 1 por la derecha, se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x-1} = 0$$

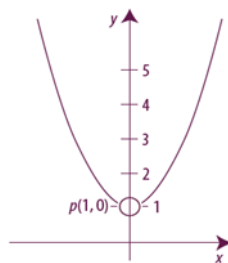
Límites bilaterales

Asimismo, también hay casos en los que x se puede aproximar a c por valores mayores o menores; es decir, tanto por la derecha como por la izquierda.



Algunos ejemplos de estos límites se representan en funciones del tipo:

$$f(x) = x^2$$



Para una mayor comprensión del concepto de límite, desarrollemos el cálculo y graficado, del límite de una función a través de la tabulación en un intervalo de aproximación.

Ejemplo: Grafica la siguiente función a trozos, y de acuerdo con ella determina los límites laterales dados.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5}{2} & x \leq 3 \\ 7 - x^2 & x > 3 \end{cases}$$



TABASCO



COBATAB
COLEGIO DE BACHILLERES
DE TABASCO

"Educación que genera cambio"

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$

d) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$

Si $x \leq 3$, x toma valores menores o igual a 3, entonces

$$f(x) = \frac{x^2 - 5}{2}$$

x	-3	-2	-1	0	1
$y = f(x)$	2	-0.5	-2	-2.5	-2

Si $x = -3$

$$f(x = -3) = \frac{x^2 - 5}{2} = \frac{(-3)^2 - 5}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Si $x = -2$

$$f(x = -2) = \frac{x^2 - 5}{2} = \frac{(-2)^2 - 5}{2} = \frac{-1}{2} = -0.5$$

Si $x = -1$

$$f(x = -1) = \frac{x^2 - 5}{2} = \frac{(-1)^2 - 5}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

Si $x = 0$

$$f(x = 0) = \frac{x^2 - 5}{2} = \frac{(0)^2 - 5}{2} = \frac{-5}{2} = -2.5$$

Si $x = 1$

$$f(x = 1) = \frac{x^2 - 5}{2} = \frac{(1)^2 - 5}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

Si $x > 3$, x toma valores mayores a 3 entonces

$$f(x) = 7 - x^2$$

x	3	4	5
$y = f(x)$	-2	-9	-18

Si $x = 3$

$$f(x = 3) = 7 - x^2 = 7 - (3)^2 = 7 - 9 = -2$$

Si $x = 4$

$$f(x = 4) = 7 - x^2 = 7 - (4)^2 = 7 - 16 = -9$$

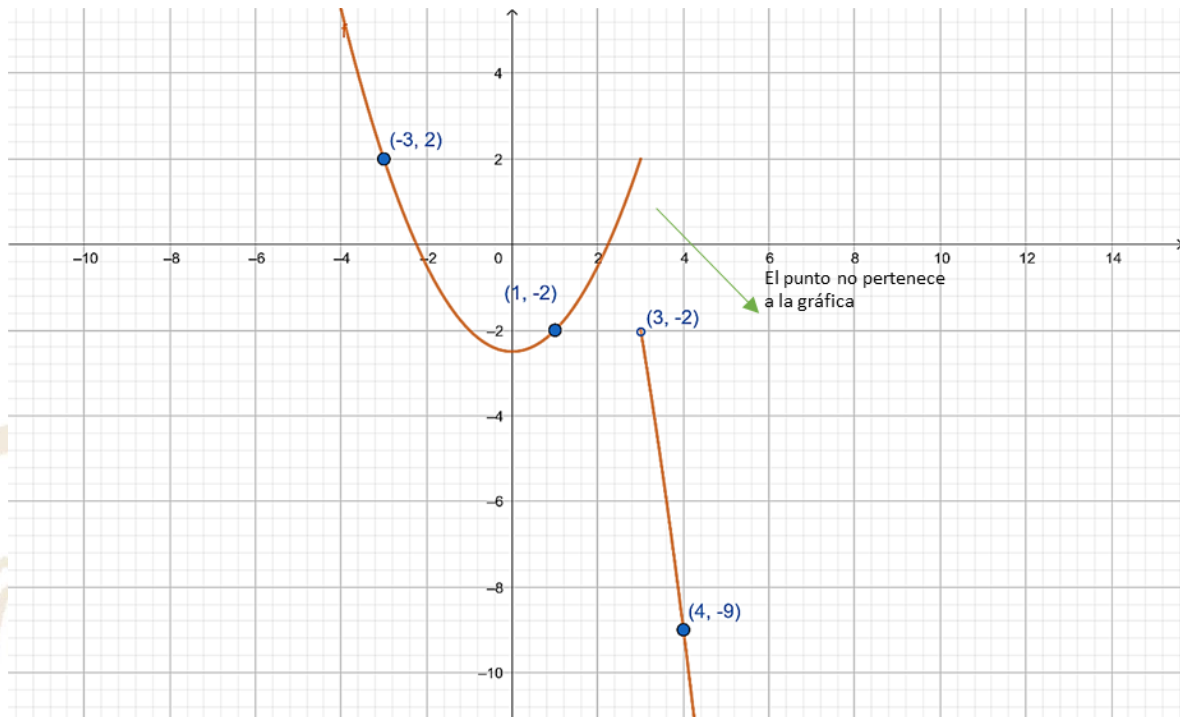
Si $x = 5$

$$f(x = 5) = 7 - x^2 = 7 - (5)^2 = 7 - 25 = -18$$

Cobanota:

La forma de representar los intervalos de manera gráfica es poner un punto hueco, si no incluye al valor; o un punto relleno, si el valor está incluido en el intervalo

La gráfica de la función a trozos es la siguiente:



Ahora procedamos a calcular:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

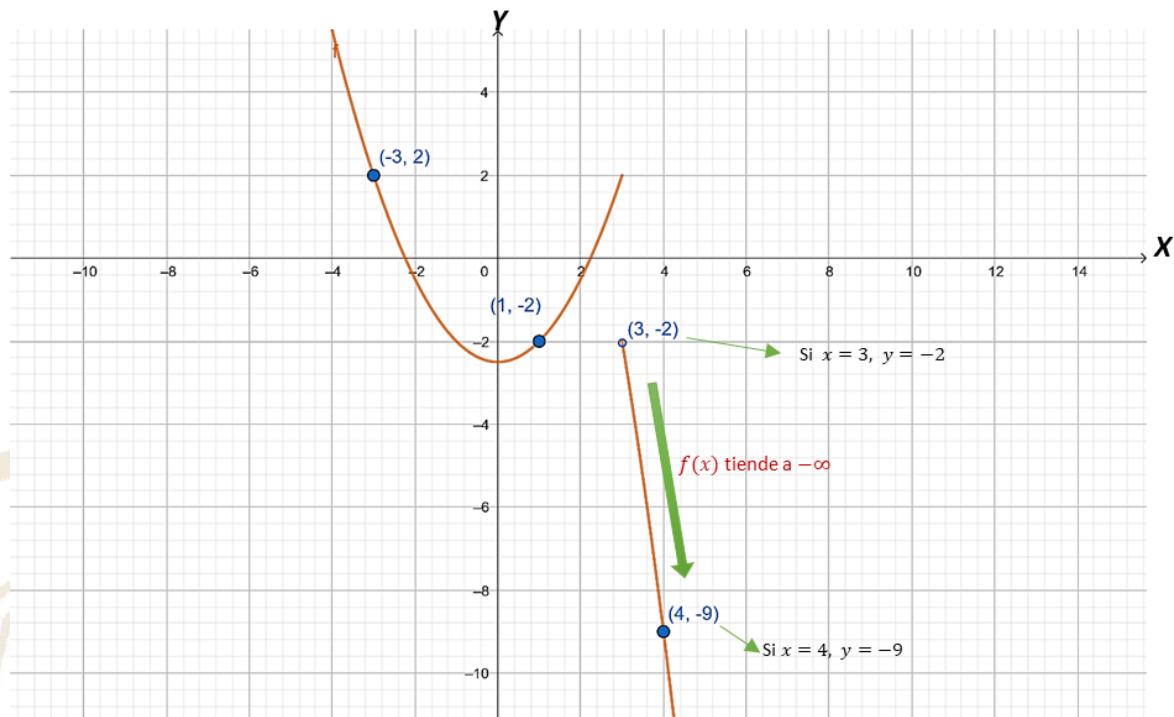
Cada que x toma valores positivos más grandes (tiende a $+\infty$), así, la función que le corresponde es:

$$f(x) = 7 - x^2$$

Porque los valores mayores que 3 pertenecen al intervalo $x > 3$.

$$\begin{aligned} f(x) &= 7 - (+\infty)^2 \\ &= 7 - \infty \\ &= -\infty \end{aligned}$$

Ahora analicemos el límite en la gráfica:



lo que el $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ es $-\infty$.

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

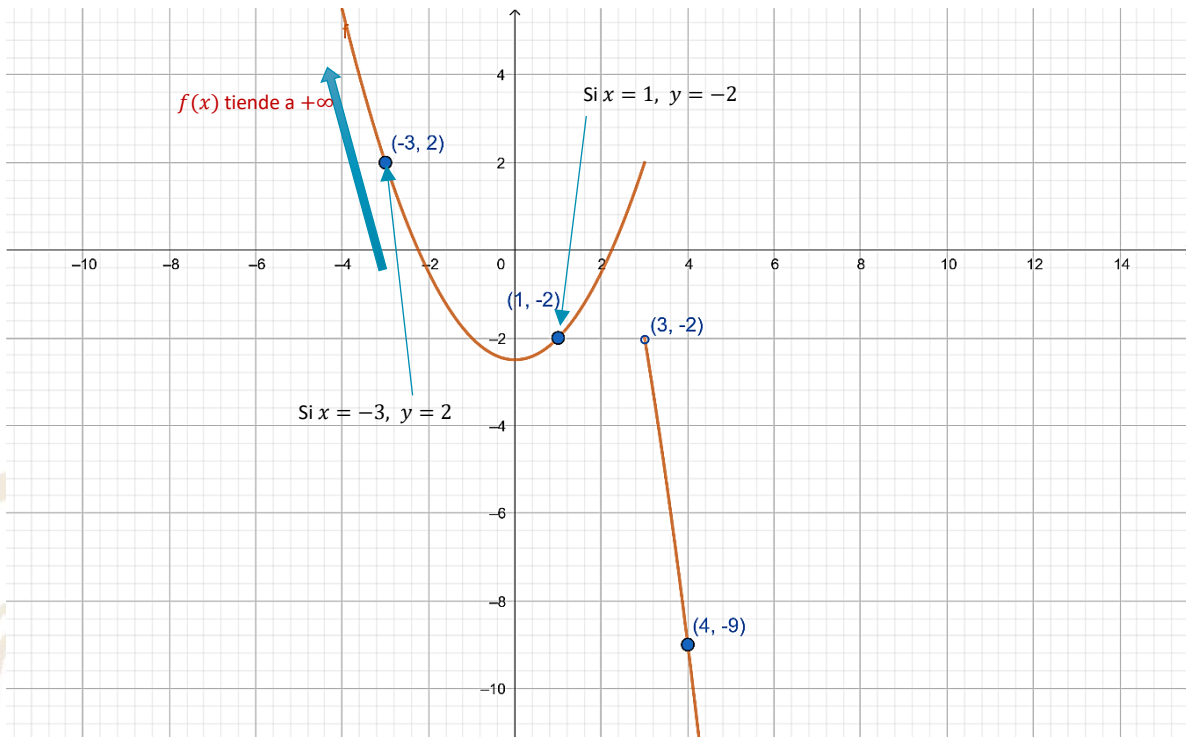
Cada que x toma valores negativos más grandes (tiende a $-\infty$), la función que corresponde es:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5}{2}$$

Porque los valores menores o igual a 3 pertenecen al intervalo $x \leq 3$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(-\infty)^2 - 5}{2} \\ &= \frac{+\infty - 5}{2} = \frac{+\infty}{2} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

Analizando la gráfica:



Por lo que el $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ es $+\infty$.

a) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -2$

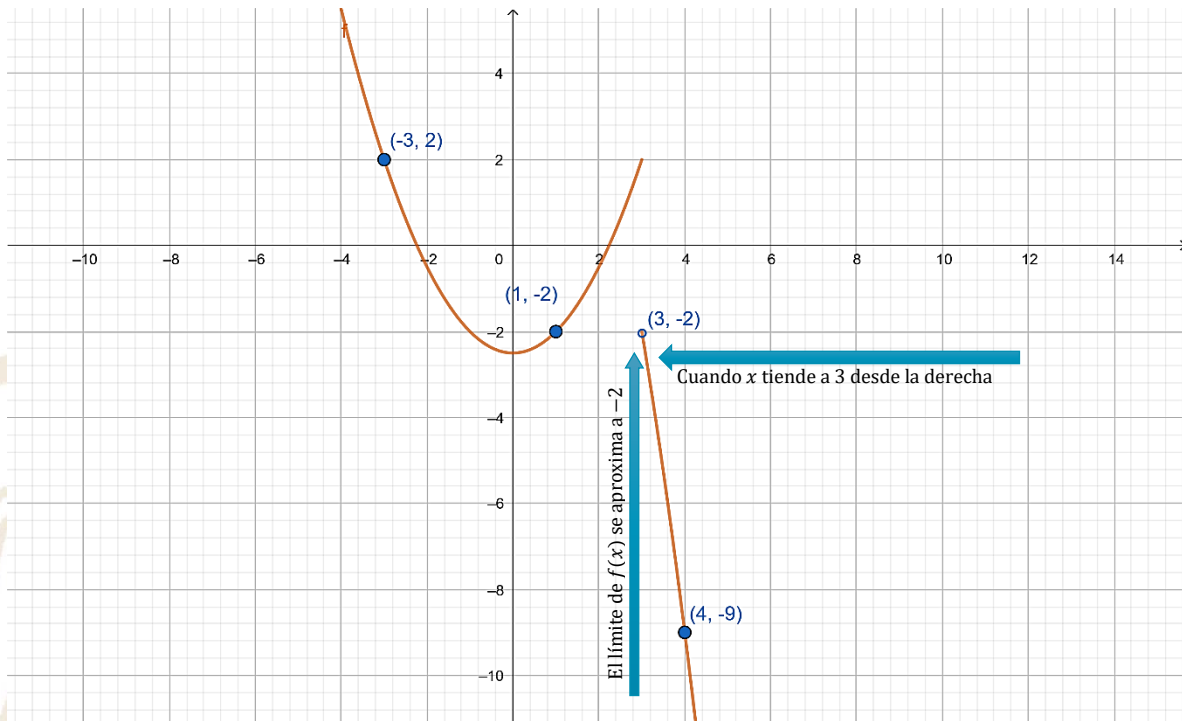
Cuando x toma valores que se acercan a 3 por la derecha (tiende a 3^+), la función que le corresponde es:

$$f(x) = 7 - x^2$$

Si x toma valores mayores que 3, pertenece al intervalo $x > 3$, por lo que:

$$\begin{aligned} f(x) &= 7 - (3)^2 \\ &= 7 - 9 \\ &= -2 \end{aligned}$$

Analizando la gráfica:



Por lo que el $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ es -2 .

Calculemos:

e)

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2$$

Cuando x toma valores que se acercan a 3 por la izquierda (tiende a 3^-), la función que le corresponde es:

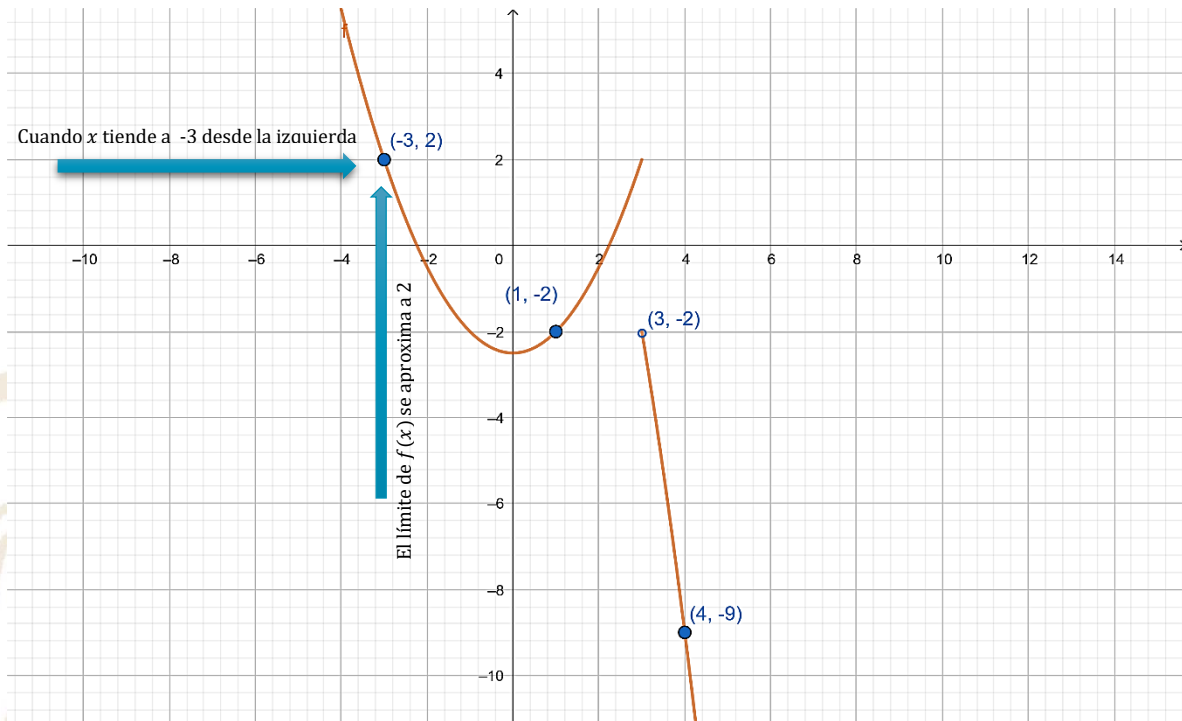
$$f(x) = \frac{x^2 - 5}{2}$$

Porque si x toma valores menores o iguales que 3, pertenece al intervalo $x \leq 3$.

$$f(x) = \frac{(3)^2 - 5}{2}$$

$$f(x) = \frac{9 - 5}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Veamos que pasa en la gráfica:



Por lo que el $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ es 2.

Para aprender más:



YouTube:
LÍMITES A PARTIR DE LA
GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

CATEGORIAS

PM3 - SA1 ACT 07

ACTIVIDAD DE REFORZAMIENTO

C1 Procedural

C2 Procesos de intuición y razonamiento.



Instrucciones: En binas y contando con el apoyo de tu profesor, resuelve los ejercicios propuestos de límites en graficas a trozo, por medio de tabulación y grafica.

Ejercicio 1.

De la función:

$$f(x) = \begin{cases} 6x - x^2 & \text{si } x < 2 \\ 2x^2 - x - 3 & \text{si } x > 2 \\ 6 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

Determine:

a) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

Ejercicio 2

De la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 4 & \text{si } x < 4 \\ -\frac{1}{8}x^2 + 10 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

Determine $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$

x	$f(x) = \frac{1}{2}x + 4$
3.9	
3.5	
3	
2	

x	$f(x) = -\frac{1}{8}x^2 + 10$
4	
4.5	
5	
6	

Ejercicio 3 De la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ 8 - 2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Determine $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

x	$f(x) = x^2$
2	
1.5	
1	
0	

x	$f(x) = 8 - 2x$
2.1	
2.7	
4	
5	

SESIÓN 09

Progresión 6

Continuidad de una función

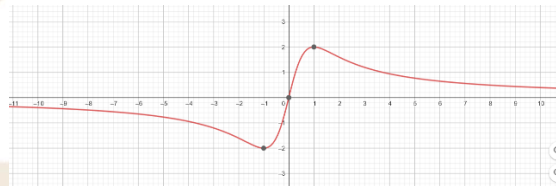
Una idea intuitiva de **función continua** es considerar que su gráfica es continua, en el sentido que se puede dibujar sin levantar el lápiz de la hoja de papel.

Ejemplos de funciones continuas

$$f(x) = \text{sen } x$$



$$f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$$

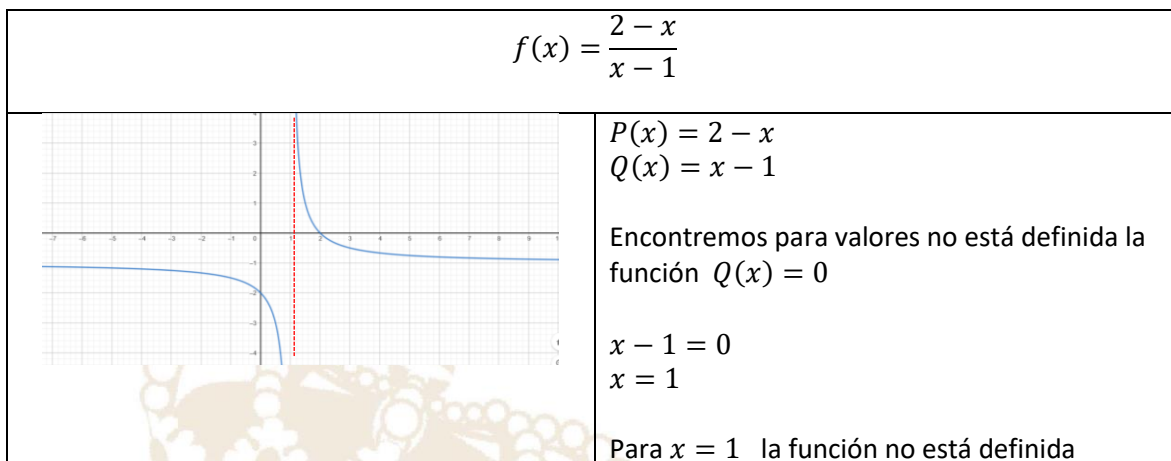


Las funciones anteriores son continuas porque se puede dibujar en un solo trazo sin levantar el lápiz del papel.

Por otro lado, Decimos que la función es **discontinua** en un cierto punto si éste rompe la continuidad de la función. Estos puntos los podemos reconocer en la gráfica de la función como cambios drásticos de valor, saltos, o como valores sin definir, huecos.

Las discontinuidades en las funciones racionales de la forma $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ con $P(x)$ y $Q(x)$ lineales o cuadráticas, se encuentran en los ceros de $Q(x)$. Esto es, los valores de x que satisfacen $Q(x) = 0$. Son puntos donde f es discontinua. Esto se debe a que la división entre cero no está definida. Recordemos que el número de discontinuidades será el número de soluciones de $Q(x) = 0$.

Ejemplo de función discontinua



La función anterior es **discontinua** ya que no se puede dibujar sin levantar el lápiz de la hoja de papel.

Continuidad de una función en un punto

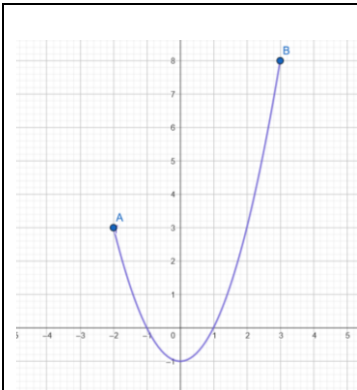
Se dice que una **función $f(x)$ es continua en un punto $x = a$** si y sólo si se cumplen con tres condiciones.

1. La función está definida en $x = a$; es decir, existe $f(a)$
2. Existe el límite de la función $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$
3. Los dos valores anteriores existen $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Por tanto, una función puede dejar de ser continua en un punto por no cumplir alguna de estas tres condiciones. En este caso (si no se cumple alguna de las condiciones) diremos que la función es discontinua en dicho punto. En caso de que no se cumpla la segunda condición, la función no estaría definida en el punto $x = a$ y no podríamos hablar ni de continuidad ni discontinuidad en dicho punto.

Ejemplo 1

Determina si la $f(x) = x^2 - 1$, definida en $-2 \leq x \leq 3$ es continua en $x = 2$



Primero verificamos que se cumpla la condición 1 evaluando $x = 2$ en la función.

$$1.- f(2) = 2^2 - 1 = 3, \text{ está definida.}$$

Comprobamos que el límite exista.

$$2.- \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 1) = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$$

Ahora comparamos que la condición 1 y la condición 2 existan y sean iguales

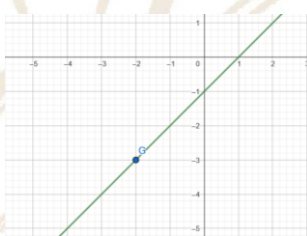
$$3.- \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 1) = f(2) = 3$$

Al cumplir las tres condiciones de continuidad, se concluye que la función es continua en $x = 2$

Ejemplo 2

Determina si la función $f(x)$ es continua en $x = -2$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x-2}{x+2} & \text{si } x \neq -2 \\ -3 & x = -2 \end{cases}$$



Comprobamos que se cumpla la condición 1 evaluando $x = -2$ en la función.

$$1.- f(-2) = -3 \text{ está definida.}$$

Verificamos que el límite exista.

$$2.- \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+x-2}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x-1)}{(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2} (x-1) = (-2-1) = -3$$

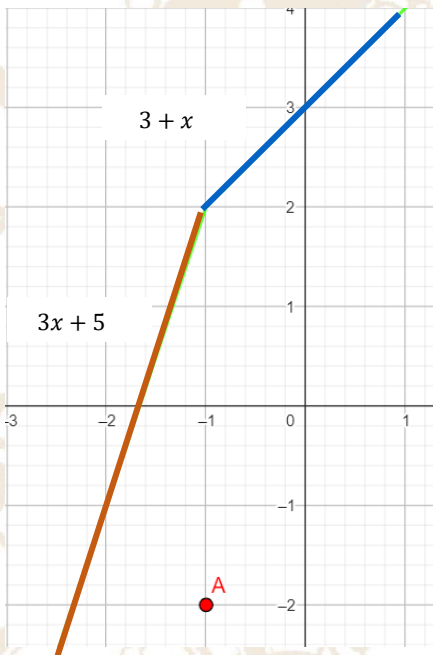
Ahora comparamos que la condición 1 y la condición 2 existan y sean iguales

$$3.- \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2) = -3$$

Como se cumple las tres condiciones de continuidad, se concluye que la función es continua en $x = -2$

Ejemplo 3

Determina si la función $f(x)$ es continua en $x = 3$

$f(x) = \begin{cases} 3x + 5 & \text{si } x < -1 \\ -2 & \text{si } x = -1 \\ 3 + x & \text{si } x > -1 \end{cases}$	
	Comprobamos que se cumpla la condición 1 evaluando $x = -1$ en la función. 1.- $f(-1) = -2$ está definida. Verificamos que el límite exista. tendremos que calcular los límites laterales de la función en el punto. Por tanto: 2.- $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (3x + 5) = 3(-1) + 5 = 2$ $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (3 + x) = 3 + (-1) = 2$ En consecuencia, existe $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2$ pues sus límites laterales son iguales Ahora comparamos que la condición 1 y la condición 2 existan y sean iguales 3.- $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) \neq f(-1)$ Por lo tanto, la función es discontinua en el $x = -1$

De manera general podemos mencionar que una función polinómica es una función continua en todos los números reales, sin embargo, una función racional es continua en los reales que no anulen su denominador, cuando una función no es continua en un punto dado se dice que es una función discontinua.

De acuerdo con las tres condiciones de continuidad, determina si las siguientes funciones son continuas o discontinuas en el valor de x dado.

SESIÓN 10

Los significados de la continuidad, las raíces y los límites dentro de una función real

Funciones continuas

Para algunas familias de funciones es posible conocer su continuidad basándose en los siguientes criterios generales:

- Las **funciones polinómicas** son continuas en todo el conjunto de los números reales.
- Las **funciones racionales** obtenidas como cociente de dos polinomios son continuas en todos los puntos del conjunto $\mathbb{R}$, salvo en aquellos en los que se anula el denominador.
- Las **funciones potenciales, exponenciales y logarítmicas** son continuas en todo su dominio de definición.
- Las **funciones trigonométricas seno y coseno** son continuas en todo el conjunto de los números reales (en cambio, la función **tangente** es discontinua en los valores múltiplos impares de $\pi/2$).

Propiedades de las funciones continuas

Dadas dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ continuas en un punto o en un intervalo, se cumple entonces que:

- La suma y la resta de ambas es una función continua en ese punto o intervalo.
- El producto de las dos funciones es una función continua en ese punto o intervalo.
- El cociente entre ambas funciones es una función continua en ese punto o intervalo salvo en aquellos en los que el denominador se anula.
- Si $f(x)$ es continua en a y $g(x)$ es continua en $g(a)$, entonces la composición de funciones $(g \circ f)(x)$ es también continua en a .

Raíces

Cuando se habla de raíces en matemáticas, se refiere a todo elemento de una función $f(x)$ tal que:

$$f(x) = 0$$

La raíz también puede referirse a un número de la forma:

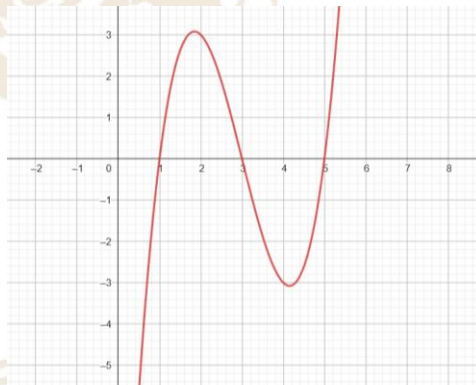
$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Que no es otra cosa que la raíz de un polinomio de la forma: $x^n - a$. Un ejemplo de ello sería la raíz cuadrada, la raíz cúbica, etc.

Es necesario destacar que, dichas soluciones, se deben encontrar dentro de un rango posible, que llamamos Dominio de la función. Dicho dominio, puede comprender tanto los números reales como los irracionales.

Además, es importante tener en cuenta que las raíces de una función no siempre son números reales. En algunos casos, las raíces pueden ser números complejos. Los números complejos son números que incluyen la unidad imaginaria 'i', que es la raíz cuadrada de -1. Por ejemplo, la función $f(x) = x^2 + 1$ tiene dos raíces complejas, i y -i. Estas raíces no pueden representarse en la línea de números reales, pero son fundamentales en muchos campos de las matemáticas y la física.

Veamos un ejemplo gráfico:



Llamemos a esta curva: $y = f(x)$

En ella vemos, que para cada valor de x (eje de abscisas, el horizontal) le corresponde un valor de y (eje de ordenadas, el vertical). La curva toma pues, diferentes valores con cada nueva variable que añadimos. Pero observamos que, hay casos, en los que la función corta al eje x. Esos «cortes» son debido a que allí la función vale cero, o siendo más concretos, que el valor de «y» es cero.

Además de las raíces, existen otros elementos importantes en el estudio de las funciones, como los puntos de inflexión y las asíntotas. Un punto de inflexión es un punto en el que la curva cambia su concavidad, es decir, pasa de ser cóncava a convexa o viceversa. Por otro lado, una asíntota es una línea recta a la que la curva se acerca cada vez más, pero nunca llega a tocar.

Para entenderlo mejor, mirémoslo del revés, pensemos que tenemos un valor de «y», -1, y para este caso equis vale cero. Como observáis, la función no desaparece, simplemente, sigue en línea recta por ese punto solamente.



TABASCO



COBATAB
COLEGIO DE BACHILLERES
DE TABASCO

"Educación que genera cambio"

Tenemos que pensar en las raíces como los puntos de referencia de las funciones, ya que, puede ser difícil conocer todos los puntos, pero sin los puntos de corte con los ejes, o raíces de la función, es imposible representarlas.

Ejemplo contextualizado:

Imagina que eres un ingeniero encargado de diseñar un puente peatonal. Para garantizar su seguridad y eficiencia estructural, decides modelar la curva de carga máxima que el puente puede soportar en función de la posición a lo largo de su longitud.

1.- Función de carga: Definimos una función $w(x)$ que describe la carga máxima soportada por el puente en función de la posición x a lo largo del puente. Esta función podría ser $w(x) = 1000 - 10x$, donde 1000 es la carga máxima en el extremo inicial y 10 representa la reducción de carga por cada metro a lo largo del puente.

2.-Continuidad: Para garantizar la seguridad de los peatones, necesitas que la función $w(x)$ sea continua a lo largo de toda la longitud del puente. Esto significa que no puede haber cambios bruscos en la carga máxima soportada de un punto a otro. La continuidad asegura que el puente resista de manera uniforme cualquier carga distribuida a lo largo de su longitud, evitando puntos débiles que puedan comprometer la seguridad.

3.- Raíces: En el contexto del diseño del puente, las raíces de la función $w(x)$ representarían los puntos donde la carga máxima es cero. Por ejemplo, si resolvemos $1000 - 10x = 0$ obtenemos $x = 100$. Esto indica que, a 100 metros del extremo inicial del puente, la carga máxima soportada sería cero, lo cual es crucial para identificar los límites de carga del puente y evitar puntos de posible ruptura.

4.- Límites: Los límites de la función $w(x)$ son importantes para determinar la capacidad máxima de carga del puente en situaciones extremas. Por ejemplo, al evaluar

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} w(x)$$

Para aprender más:



YouTube:
Límites laterales, límites por la derecha, límites por la izquierda

podrías determinar la carga máxima que puede soportar el extremo final del puente antes de que se produzca una falla estructural. Este límite es esencial para el diseño seguro del puente, asegurando que cumpla con los estándares de resistencia y seguridad establecidos.

En este ejemplo, la función $w(x)$ no solo modela la carga máxima que puede soportar un puente peatonal, sino que también ilustra cómo los conceptos matemáticos de continuidad, raíces y límites son fundamentales para garantizar su diseño seguro y eficiente en el entorno real de la ingeniería civil.

Para aprender más:



YouTube:
Límites y continuidad de una función



TABASCO

"Educación que genera cambio"



COBATAB
COLEGIO DE BACHILLERES
DE TABASCO

CATEGORIAS

PM3-SA1 ACT 08

ACTIVIDAD DE REFORZAMIENTO

C1 Procedural

C2 Procesos de intuición y razonamiento.



Instrucciones: En binas y bajo el acompañamiento del docente, realicen un ordenador grafico donde identifiquen el significado de continuidad, raíces y límites de una función real.

SESIÓN 11

Progresión 7

La derivada como razón de cambio

Tener las facilidades y herramientas para acceder a todo tipo de información mediante dispositivos y herramientas tecnológicas es lo más común y fácil en estos tiempos, pero, aparte de lo que ya conocemos ¿Qué otras cosas podemos lograr con esto?

La implementación de las matemáticas en situaciones de la vida diaria no siempre es visible para nosotros al realizar ciertas tareas, pero si logramos implementar el razonamiento en su utilización y solucionar problemas desde los más simple a lo más complejo te convertiría en el próximo Isaac Newton.

Existen innumerables softwares que nos pueden ayudar a modelar ciertos problemas o situaciones que nos aquejan en el día a día y nos da una perspectiva y posible solución de las cosas, utilizando cálculos, interpretaciones y análisis de los resultados como lo es Geogebra.

Imagina que eres un gerente de alguna fábrica y tienes que generar ciertos productos, para ellos debes saber la tasa de cambio de costos con respecto a la cantidad que produces o quizá seas un gran físico como Einstein y desees conocer la velocidad instantánea en la que alguna partícula se desplaza por una línea recta.

Ahora, con los múltiples usos y alcances de la tecnología, ¿Crees que se podrían realizar estos análisis con el uso del cálculo y un software?

¿Te gustaría ser ese agente de cambio para mejorar el futuro de los jóvenes bachilleres?

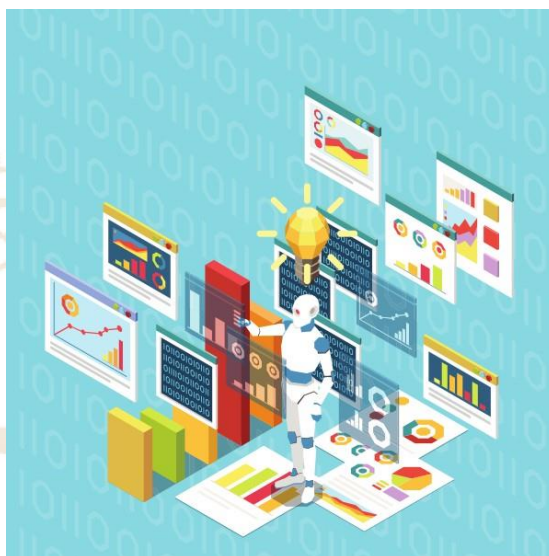


Imagen obtenida de Freepik en junio, 2024.

Razón de cambio

Para comenzar el estudio de la razón de cambio de una función, analicemos la siguiente situación:

Consideremos la trayectoria de un móvil que está representada mediante la función $y = f(x) = x^2 - 4$. Si queremos analizar lo que sucede en el intervalo $[3,4]$, podemos identificar dos cambios, por un lado, el cambio en la variable independiente x y por otro lado el cambio en la variable dependiente $y = f(x)$.

En este caso particular, los valores que toma la variable x , en el intervalo $[3,4]$, son el valor inicial $x_i = 3$ y el valor final $x_f = 4$, y el incremento entre estos dos valores es:

$$\Delta x = x_f - x_i = 4 - 3 = 1$$

Para el caso de la variable y , su valor inicial $y_i = f(x_i)$ y su valor final $y_f = f(x_f)$ son:

	x	$f(x) = x^2 - 4$
Valor inicial	$x_i = 3$	$y_i = f(x_i) = f(3) = (3)^2 - 4 = 9 - 4 = 5$
Valor final	$x_f = 4$	$y_f = f(x_f) = f(4) = (4)^2 - 4 = 16 - 4 = 12$

Y muestran que el incremento (o cambio) de la variable y tiene como valor:

$$\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1) = 12 - 5 = 7.$$

De aquí podemos observar que, la razón entre estos dos cambios da como resultado:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_f - y_i}{x_f - x_i} = \frac{f(x_f) - f(x_i)}{x_f - x_i} = \frac{12 - 5}{4 - 3} = \frac{7}{1} = 7$$

Por lo tanto, la razón de cambio de la función $f(x) = x^2 - 4$ en el intervalo $[3,4]$ es $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 7$. A esta razón de cambio se le conoce como razón de cambio promedio.

¿Sería el mismo valor de la razón de cambio si hacemos que la diferencia entre los valores de x sea cada vez más pequeña, es decir, se mantendría el mismo valor de la razón de cambio si tomando valores de x más cercanos? ¿Cuál sería su valor?

Para responder a las cuestiones anteriores hagamos las siguiente:

Aproximemos el valor final x_f al valor inicial $x_i = 3$, lo cual reduce a Δx cada vez más pequeño, calcularemos los valores de Δy respectivamente, y con esto veremos qué sucede con la razón de cambio $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.



TABASCO

COBATAB
COLEGIO DE BACHILLERES
DE TABASCO

"Educación que genera cambio"

Tomemos los valores $x_i = 3$ y $x_f = 3.8$ y repitamos el proceso anterior. En la tabla siguiente está resumido el proceso:

Variable	Valor inicial	Valor final	Incremento
x	$x_i = 3$	$x_f = 3.8$	$\Delta x = 3.8 - 3 = 0.8$
$y = f(x)$	$y_i = f(3)$ $= (3)^2 - 4$ $= 9 - 4 = 5$	$y_f = f(3.8)$ $= (3.8)^2 - 4$ $= 14.44 - 4 = 10.44$	$\Delta y = f(3.8) - f(3)$ $= 10.44 - 5$ $= 5.44$

Como se puede observar la razón de cambio se modifica al siguiente valor:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5.44}{0.8} = 6.8$$

Consideremos una aproximación más cercana. Tomemos los valores $x_i = 3$ y $x_f = 3.4$, esto es:

Variable	Valor inicial	Valor final	Incremento
x	$x_i = 3$	$x_f = 3.4$	$\Delta x = 3.4 - 3 = 0.4$
$y = f(x)$	$y_i = f(3)$ $= (3)^2 - 4$ $= 9 - 4 = 5$	$y_f = f(3.4)$ $= (3.4)^2 - 4$ $= 11.56 - 4 = 7.56$	$\Delta y = f(3.4) - f(3)$ $= 7.56 - 5$ $= 2.56$

Nuevamente su razón de cambio se modifica al valor:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2.56}{0.4} = 6.4$$

Consideremos otra aproximación mucho más cercana. Tomemos los valores $x_i = 3$ y $x_f = 3.01$, esto da como resultado:

Variable	Valor inicial	Valor final	Incremento
x	$x_i = 3$	$x_f = 3.01$	$\Delta x = 3.01 - 3 = 0.01$
$y = f(x)$	$y_i = f(3)$ $= (3)^2 - 4$ $= 9 - 4 = 5$	$y_f = f(3.01)$ $= (3.01)^2 - 4$ $= 9.0601 - 4 = 5.0601$	$\Delta y = f(3.01) - f(3)$ $= 5.0601 - 5$ $= 0.0601$

Para esta aproximación el valor de la razón de cambio es:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6.01$$

Para concluir, haremos una última aproximación muy, pero muy cercana. Tomemos los valores $x_i = 3$ y $x_f = 3.0001$

Variable	Valor inicial	Valor final	Incremento
x	$x_i = 3$	$x_f = 3.0001$	$\Delta x = 3.0001 - 3$ $= 0.01$
$y = f(x)$	$y_i = f(3)$ $= (3)^2 - 4$ $= 9 - 4 = 5$	$y_f = f(3.0001)$ $= (3.0001)^2 - 4$ $= 9.00060001 - 4$ $= 5.00060001$	$\Delta y = f(3.0001) - f(3)$ $= 5.00060001 - 5$ $= 0.00060001$

La razón de cambio para esos valores

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6.0001$$

Se puede observar que al acercar x_f a $x_i = 3$, es decir, el incremento $\Delta x = x_f - x_i$ se va aproximando cada vez más a cero, los valores de y_f y y_i muestran que el valor del incremento $\Delta y = f(x_f) - f(x_i)$ que también se va modificando hasta obtener que la razón de cambio $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ que se va aproximando al valor de 6.

Estas iteraciones muestran que al decrecer Δx también lo hace Δy , mientras que la razón de cambio toma valores sucesivos desde 7 hasta el 6.001

La sucesión de valores de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tendrá como límite 6, toda vez que Δx se ha hecho cada vez más pequeño tanto como 0, por lo tanto,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 6$$

"En el límite cuando Δx tiende a 0, el valor de la razón de cambio es igual a 6 en el punto $x = 3$ "

Esta es la razón de cambio que se denomina *razón de cambio instantánea* que para nuestro ejemplo, la razón de cambio instantánea de la función $f(x) = x^2 - 4$ en el valor $x = 3$ es 6.

A continuación, damos paso al formalismo de los conceptos de razón de cambio.

Razón de cambio de una función

El incremento de una variable que pasa de un valor numérico a otro, es la diferencia que se obtiene restando el valor inicial al valor final. Este incremento se representa por la letra Δ "Delta".

Si $y = f(x)$ es una función continua de x , y la variable x cambia de un valor inicial x_1 hasta el valor final x_2 , entonces su incremento estará representado por Δx (se lee Delta x) que es igual a:

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

El incremento correspondiente de la función $y = f(x)$, que cambia de y_1 hasta y_2 , se denota por Δy (se lee Delta y) que es igual

$$\Delta y = y_2 - y_1$$

O también se puede denotar como $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$

x	$y = f(x)$
x_1	$y_1 = f(x_1)$
x_2	$y_2 = f(x_2)$

$\Delta x = x_2 - x_1$
 $\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1)$

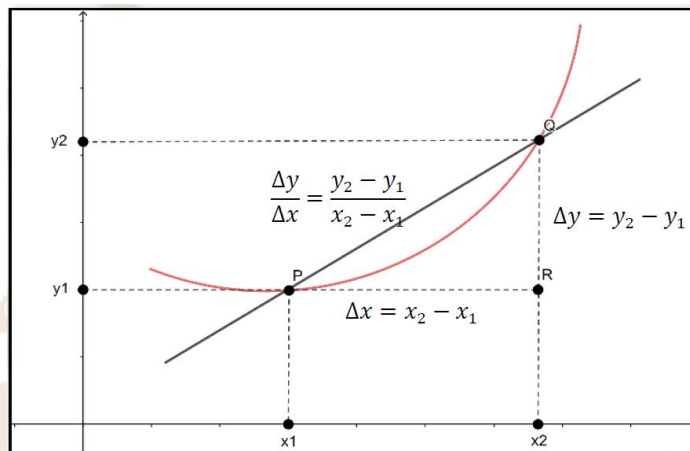
Al cociente del incremento Δy entre el incremento Δx , se le denomina **Razón de cambio promedio** $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ y expresará la rapidez (velocidad) con la que cambia la variable x en un intervalo $[x_1, x_2]$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Como $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$, la razón de cambio puede escribirse

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Gráficamente se puede representar la razón de cambio de la siguiente forma:



La pendiente de la recta secante que une dos puntos cualesquiera P y Q sobre la curva de la función es la razón de cambio promedio en el intervalo $[x_1, x_2]$.

Si x_1 es el valor inicial, entonces x_2 será igual a este valor x_1 más un incremento Δx , es decir, $x_2 = x_1 + \Delta x$ entonces tenemos que

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Se puede escribir como

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Esta expresión es la **Razón de cambio promedio de la función en el intervalo $[x_1, x_2]$** .

Ejemplo. Un ciclista en 10 minutos de recorrido alcanza una velocidad de 220 m/min, a los 30 min de recorrido lleva una velocidad de 500 m/min. ¿Cuál es la razón de cambio de la velocidad del ciclista? ¿Cómo se denomina a este cambio de velocidad?

Solución.

Considerando el tiempo $t_1 = 10$ minutos que utiliza el corredor para alcanzar una velocidad de $v_1 = f(t_1) = 220 \frac{m}{min}$ y el tiempo $t_2 = 30$ minutos para llegar a una velocidad de $v_2 = f(t_2) = 500 \frac{m}{min}$

Entonces la razón de cambio promedio de la velocidad es

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{500 \frac{m}{min} - 220 \frac{m}{min}}{30 min - 10 min} = \frac{280 \frac{m}{min}}{20 min} = 14 \frac{m}{min^2}$$

A la variación de la velocidad respecto al tiempo se denomina *aceleración*.

Por otro lado. Si el Intervalo de $[x_1, x_2]$ se hace infinitamente pequeño, tanto como la diferencia entre x_1 y x_2 se aproxime a cero, es decir, $\Delta x = x_2 - x_1$ tiende a cero, la razón de cambio se estará determinando exclusivamente para el punto x_1 , por lo que se denominará **razón de cambio instantánea** en el punto x_1 .

La razón de cambio instantánea es el límite del cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ cuando el incremento de la variable independiente tiende a cero ($\Delta x \rightarrow 0$).

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Esta expresión se define como la **Razón de cambio instantánea de la función en $y = f(x)$ en el punto x_1** .

Definición de la derivada como razón de cambio

En general, a la razón de cambio instantánea de la función $y = f(x)$ para cualquier punto x , expresado de forma matemática como:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Se denomina **Derivada de la función $f(x)$** , es decir, La derivada de una función es el límite de la razón del incremento de la función al incremento de la variable independiente cuando éste tiende a cero, y se denota con el símbolo:

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Cabe destacar que este tipo de notación es conocida como **Notación de Leibniz**, y también puede encontrarse con los símbolos:

$$\frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx} \text{ o } \frac{d}{dx} f(x)$$

Existen otros tipos de notaciones que se emplean para diferentes contextos. Como por ejemplo en la física, la derivada la escribimos con la **Notación de Newton**:

$$\dot{x} = \frac{d}{dt}x(t)$$

Y en muchos casos, por simplicidad, utilizamos la **Notación de Lagrange**:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x)$$

La derivada es una herramienta fundamental en el cálculo, usada para medir cómo cambia una función en un punto específico. La regla de los cuatro pasos es un método sistemático para encontrar la derivada de una función utilizando su definición. A continuación, se detallan los cuatro pasos.

Regla de los Cuatro Pasos

1. Hallar el valor de la función $f(x)$ en $x = x + \Delta x$, esto es, calcular $f(x + \Delta x)$.
2. Encontrar el incremento de la función f , es decir, calcular $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$
3. Calcular la razón de cambio entre las variables, esto es, calcular $\frac{\Delta y}{\Delta x}$
4. Determinar el valor de la razón de cambio cuando Δx tiende a cero, es decir, calcular $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Resolvemos los siguientes problemas de cálculo de derivada mediante la regla de los cuatro pasos..

Problema

1. (Función constante): En un estacionamiento, el precio por vehículo es de 4 dólares, independientemente del tiempo que se deje en el estacionamiento; sin exceder las 24 horas. Calcule la tasa de cambio del costo del estacionamiento por unidad de hora. Considere que la función costo de estacionamiento es $f(x) = 4$, y la tasa de cambio del costo del estacionamiento por unidad de hora es $\frac{df}{dx}$.

Solución.

Recordemos que $f(x) = 4$ es una función constante o de grado cero, es decir, para cualquier valor de x en el dominio la función siempre tendrá el valor de 4. Para calcular la derivada de $f(x) = 4$ debemos desarrollar la expresión

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Primer paso: Calculamos $f(x + \Delta x)$

Como $f(x) = 4$ es una función constante, entonces, el valor de es $f(x + \Delta x) = 4$

Segundo Paso (Restar): Calculamos $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

El valor de $f(x + \Delta x) = 4$ y de $f(x) = 4$, entonces,

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$\Delta y = 4 - 4 = 0$$

Por lo que, $\Delta y = 0$

Tercer Paso. Dividir la expresión $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ entre Δx

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Como $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$$

Por lo que, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$

Cuarto paso: Calculamos el límite $\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0$$

Por lo tanto, la tasa de cambio del costo del estacionamiento por unidad de hora de la función constante $f(x) = 4$ es 0, es decir, $f'(x) = 0$

2. (Función lineal): El costo total C en dólares para producir x unidades de un producto es $C(x) = 10x + 50$, donde 50 es un costo fijo. Encuentra el costo marginal de producir una unidad adicional usando el método de los cuatro pasos. Nota: El costo marginal es la primera derivada de la función de costo C con respecto a la cantidad de producida x .

Solución.

Como el costo marginal es la derivada de la función costo $C(x) = 10x + 50$, entonces debemos calcular

$$\frac{dC}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{C(x + \Delta x) - C(x)}{\Delta x}$$

Primer paso: Calculamos $C(x + \Delta x)$

Como $C(x) = 10x + 50$, entonces, el valor de es

$$C(x + \Delta x) = 10(x + \Delta x) + 50$$

$$C(x + \Delta x) = 10x + 10\Delta x + 50$$

Segundo Paso (Restar): Calculamos $\Delta C = C(x + \Delta x) - C(x)$

El valor de $C(x) = 10x + 10\Delta x + 50$ y de $C(x) = 10x + 50$, entonces,

$$\Delta C = C(x + \Delta x) - C(x)$$

$$\Delta C = (10x + 10\Delta x + 50) - (10x + 50) = 10\Delta x$$

Por lo que, $\Delta y = 10\Delta x$

Tercer Paso. Dividir la expresión $\Delta C = C(x + \Delta x) - C(x)$ entre Δx

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{C(x + \Delta x) - C(x)}{\Delta x}$$

Como $\Delta C = C(x + \Delta x) - C(x) = 10\Delta x$

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{C(x + \Delta x) - C(x)}{\Delta x} = \frac{10\Delta x}{\Delta x} = 10$$

Por lo que, $\frac{\Delta C}{\Delta x} = 10$

Cuarto paso: Calculamos el límite $\frac{dC}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{C(x + \Delta x) - C(x)}{\Delta x}$

$$\frac{dC}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{C(x + \Delta x) - C(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 10 = 10$$

Por lo tanto, El costo marginal es, $C'(x) = \frac{dC}{dx} = 10$

3. (Función cuadrática): La altura h en metros de un proyectil en función del tiempo t en segundos está dada por $h(t) = -4.9t^2$. Encuentra la velocidad del proyectil en cualquier instante t usando la regla de los cuatro pasos.

Solución.

Como la velocidad del proyectil es la derivada de la función posición, entonces se debe calcular

$$v(t) = h'(t) = \frac{dh}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{h(t+\Delta t) - h(t)}{\Delta t}, \text{ procedemos a realizar cada paso:}$$

Primer paso: Calculamos $h(t + \Delta t)$.

Sustituimos t por $t + \Delta t$ en la función $h(t) = -4.9t^2$, esto es:

$$h(t + \Delta t) = -4.9(t + \Delta t)^2$$

Resolvemos el binomio al cuadrado $(t + \Delta t)^2$, a partir del producto notable:

$$(a + b)^2 = (a)^2 + 2(a)(b) + (b)^2$$

Considerando $a = t$, $b = \Delta t$, se tiene

$$\begin{aligned}(t + \Delta t)^2 &= (t)^2 + 2(t)(\Delta t) + (\Delta t)^2 \\ &= t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2\end{aligned}$$

Sustituyendo este resultado, obtenemos que $h(t + \Delta t) = -4.9(t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2)$

Segundo Paso (Restar): Calculamos $\Delta h = h(t + \Delta t) - h(t)$

El valor de $h(t + \Delta t) = -4.9(t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2)$ y de $h(x) = -4.9t^2$, entonces el incremento es:

$$\Delta h = -4.9(t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2) + 4.9(t^2)$$

Identificando términos semejantes y reduciendo se tiene:

$$\Delta h = -4.9t^2 - 9.8t\Delta t - 4.9\Delta t^2 + 4.9t^2$$

$$\Delta h = (-4.9t^2 + 4.9t^2) - 9.8t\Delta t - 4.9\Delta t^2$$

$$\Delta h = -9.8t\Delta t - 4.9\Delta t^2$$

Por lo que, $\Delta h = h(t + \Delta t) - h(t) = -9.8t\Delta t - 4.9\Delta t^2$

Tercer Paso: Dividir $\Delta h = h(t + \Delta t) - h(t)$ entre Δt

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

Sustituyendo $\Delta h = h(t + \Delta t) - h(t) = -9.8t \Delta t - 4.9\Delta t^2$, se tiene:

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{-9.8 t \Delta t - 4.9\Delta t^2}{\Delta t}$$

Realizando las divisiones de forma distributiva se tiene:

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{-9.8 t \Delta t}{\Delta t} + \frac{-4.9\Delta t^2}{\Delta t}$$

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = -9.8 t - 4.9\Delta t$$

Por lo que:

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t} = -9.8 t - 4.9\Delta t$$

Cuarto paso: Calcular el límite $\frac{dh}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta h}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{h(t+\Delta t)-h(t)}{\Delta t}$

Sustituyendo $\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{h(t+\Delta t)-h(t)}{\Delta t} = -9.8 t - 4.9\Delta t$, se tiene

$$\frac{dh}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (-9.8t - 4.9\Delta t)$$

Como el límite de una suma es la suma de los límites

$$\frac{dh}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (-9.8t) + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (-4.9\Delta t)$$

En este caso $-9.8t$ es constante para Δt , entonces el valor del límite es

$$\frac{dy}{dx} = -9.8t + (0) = -9.8t$$

Por lo tanto, la derivada de la función $h(t) = -4.9t^2$ es $-9.8t$, es decir, la velocidad del proyectil es $v(t) = h'(t) = \frac{dh}{dt} = -9.8t$.

Te Invitamos a revisar el siguiente video, para que visualices como calcular las derivadas de funciones polinomiales de grado 3 y grado 4 haciendo uso de la regla de los cuatro pasos

Para aprender más:



YouTube:
Derivada por definición.
Función Cúbica. Ejemplo 1

SESIÓN 12

SA 1: Mi Laboratorio de matemáticas

El álgebra, la geometría, el cálculo, entre otras ramas de las matemáticas, se utilizan en prácticamente todas las ciencias que el ser humano ha desarrollado. Un ejemplo es la física, que utiliza a las matemáticas como un lenguaje para expresar la relación entre las magnitudes que podemos medir al estudiar los fenómenos naturales.

Durante el club de matemáticas, Ximena, Tonatiuh e Itzel explicaron al profesor asesor que podían calcular la velocidad de un objeto al finalizar el recorrido por un plano inclinado, deslizándose sin ningún tipo de pérdida de energía por fricción, utilizando las leyes de conservación de la energía. Sin embargo, también explicaron que no eran capaces de modelar lo ocurrido durante todo el trayecto, desde el momento de soltar el objeto hasta el momento donde finalizaba su recorrido, sin repetir los cálculos para cada una de las posiciones del recorrido.



Estudiantes explicando al profesor la problemática. Imagen de Freepik

Ante tal problemática, el docente propuso que realizaran el siguiente experimento con la finalidad de que conocieran otras alternativas para modelar, a partir de un experimento, el modelo gráfico y el modelo algebraico de un objeto deslizándose por un plano inclinado.

Material

- Una canica o balón.
- Una cinta métrica 150 cm de plástico.
- Una regla acanalada de madera de más de 120 cm.
- Un trozo de hilo para sujetar la regla.
- Un bloque de madera de 10 cm de alto aproximadamente.
- Un smartphone (celular) con la mejor prestación en su cámara.



Procedimiento

1. Coloca la cinta métrica a lado del canal que se encuentra en la regla acanalada (fíjala con cinta), la idea fundamental es que el canal quede graduado, y sea reconocible cada posición respecto al inicio del recorrido.

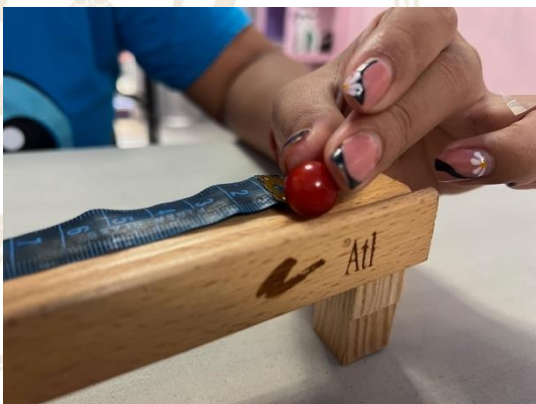
2. Crea un plano inclinado colocando la regla acanalada sobre una superficie plana y el bloque en uno de los extremos de la regla; el extremo donde se coloca el bloque para dar elevación debe ser aquel que tiene el inicio de la graduación, es decir, 0 cm.



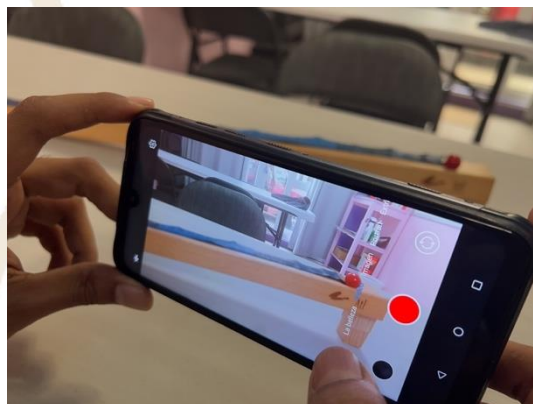
Fotografía 01 – Elaboración de la regla acanalada graduada (junio, 2024).

3. Posiciona la canica en la posición inicial, en 0 cm, suéltala y grabe todo el fenómeno desde que parte la canica de la posición 0 cm hasta el final de la regla o hasta llegar a 100 cm. Si su smartphone tiene la opción de cámara lenta, úsela. (Fotografía 03)

4. Ahora revisa el video y construya una tabla donde registren el tiempo transcurrido y su posición, se sugiere que sea cada 0.1 segundo.



Fotografía 02 – Creación del plano inclinado y preparación de la canica (junio, 2024).

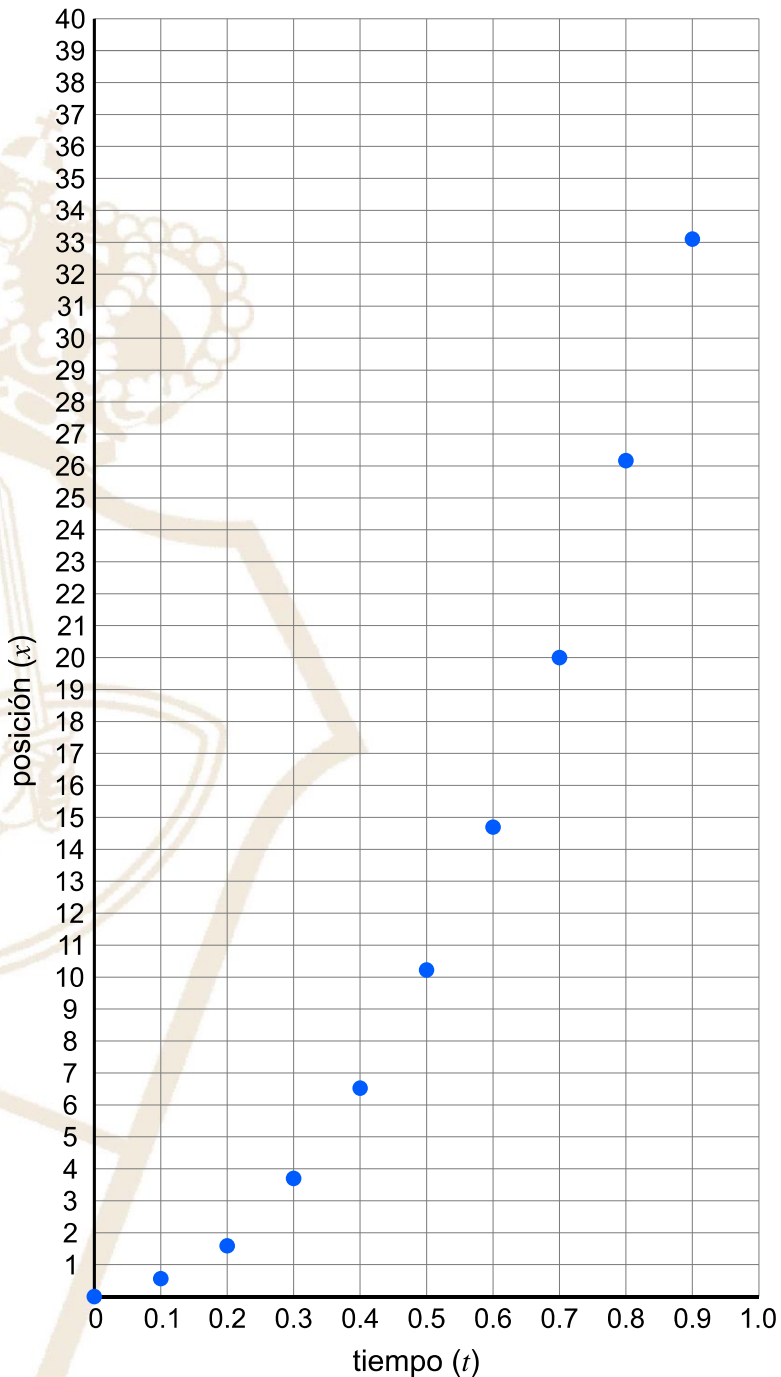


Fotografía 03 – Canica siendo grabada al rodar por el plano inclinado (junio, 2024).

Ximena, Tonatiuh e Itzel realizaron el experimento con detenimiento, registraron sus datos y graficaron los datos obtenidos en un plano cartesiano, donde el eje de la variable independiente es el tiempo y el eje de la variable dependiente es la posición; este plano se conoce como Diagrama posición (x) vs tiempo (t).

Tiempo (segundos)	Posición (cm)
0.0	0.0
0.1	0.4
0.2	1.6
0.3	3.7
0.4	6.5
0.5	10.2
0.6	14.7
0.7	20.0
0.8	26.2
0.9	33.1
1.0	40.9
1.1	49.5
1.2	58.9
1.3	69.1
1.4	80.1
1.5	92.0

Gráfico posición vs tiempo

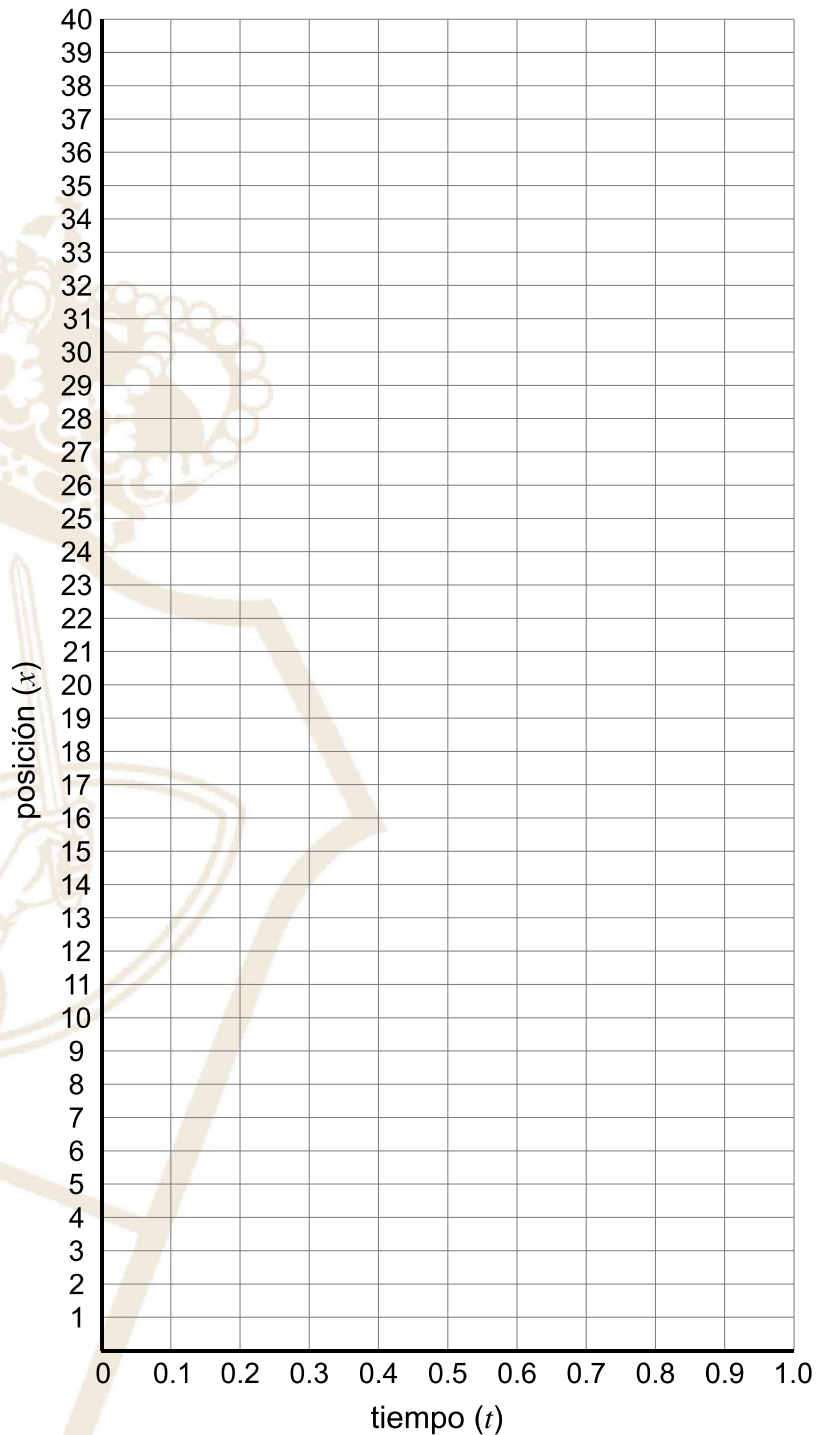




Realice el experimento, registre la posición para cada tiempo transcurrido y posteriormente gráfiquelo tal y como lo hicieron Ximena, Tonatiuh e Itzel.

Tiempo (segundos)	Posición (cm)
0.0	
0.1	
0.2	
0.3	
0.4	
0.5	
0.6	
0.7	
0.8	
0.9	
1.0	
1.1	
1.2	
1.3	
1.4	
1.5	

Gráfico posición vs tiempo



Posteriormente, el profesor les mostró que con esos datos era posible calcular la velocidad media, que no es otra cosa que la pendiente del segmento que une dos puntos cualesquiera, por ejemplo, la velocidad media que tiene la canica en ir de 6.54 cm a 10.22 cm en el intervalo de 0.4 s a los 0.5 s, esto se obtiene de la siguiente manera:

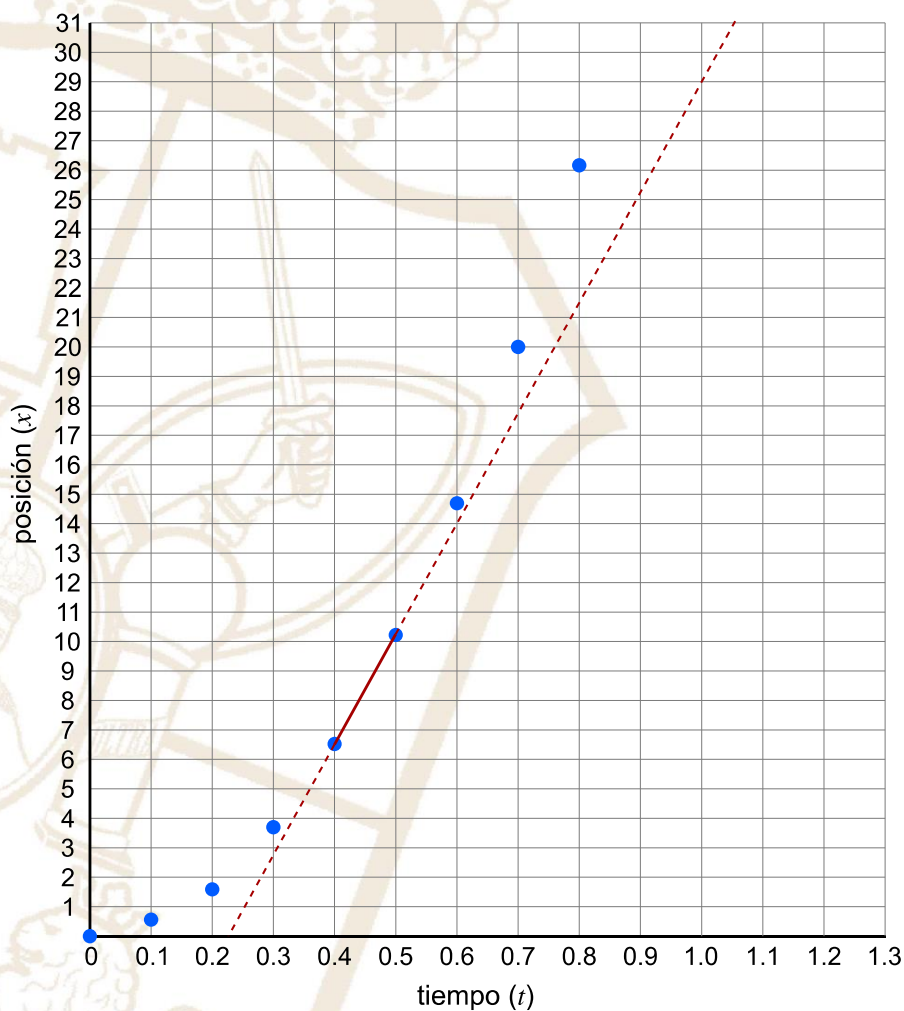
Para el intervalo de los 0.4 s a los 0.5 s es:

$$\bar{v}_{0.4-0.5} = \frac{10.2 - 6.5}{0.5 - 0.4} = \frac{3.7}{0.1}$$

$$\bar{v}_{0.4-0.5} = 37$$

Es decir, la velocidad media en el intervalo de 0.4 s a 0.5 s es 37 cm/s.

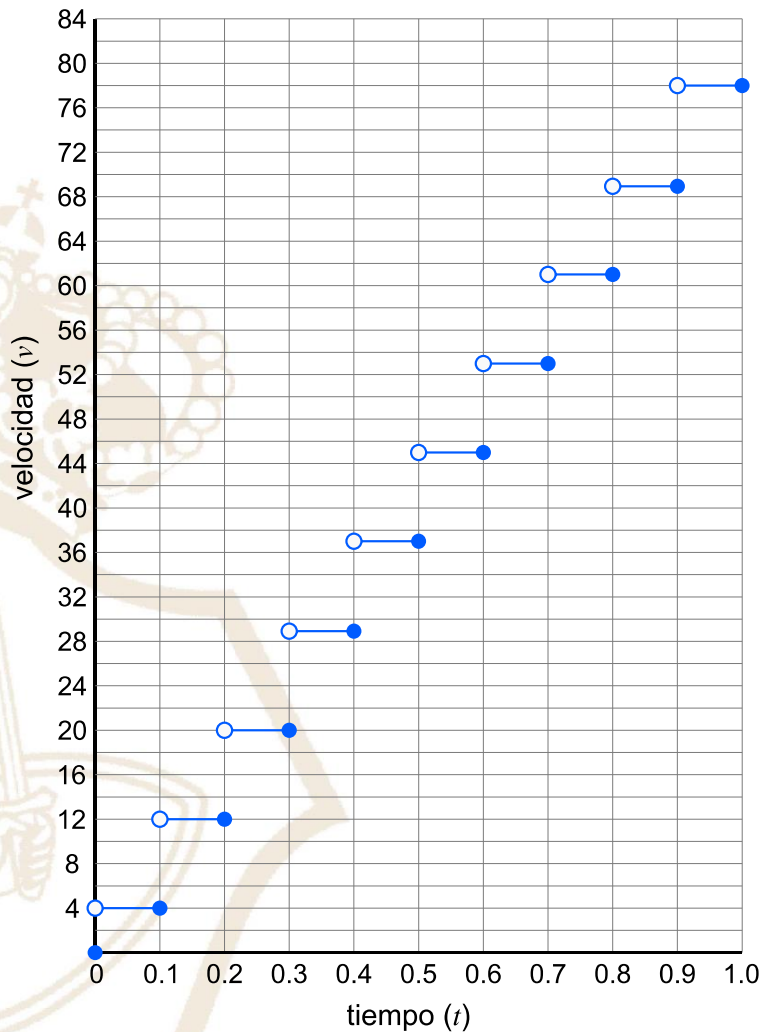
Gráfico posición vs tiempo



Ximena, Tonatiuh e Itzel calcularon todas las velocidades medias, las tabularon y las graficaron en un diagrama velocidad (v) vs tiempo (t):

Tiempo (segundos)	Velocidad (cm/s)
0.0 - 0.1	4
0.1 - 0.2	12
0.2 - 0.3	20
0.3 - 0.4	29
0.4 - 0.5	37
0.5 - 0.6	45
0.6 - 0.7	53
0.7 - 0.8	61
0.8 - 0.9	69
0.9 - 1.0	78
1.0 - 1.1	86
1.1 - 1.2	94
1.2 - 1.3	102
1.3 - 1.4	110
1.4 - 1.5	119

Gráfico velocidad vs tiempo



Aprovechando que realizaron el video en cámara lenta, decidieron calcular la velocidad media para intervalos de tiempo muy pequeños al rededor de los 0.2s, para ello eligieron un tiempo t_1 menor que 0.2 s y un t_2 mayor que 0.2 s, pero muy cercano a 0.2 s, para acercarse lo más posible al valor de la velocidad en 0.2 s.

La primera aproximación fue para $t_1 = 0.15$ y $t_2 = 0.25$:

$$\bar{v}_1 = \frac{2.55 - 0.95}{0.25 - 0.15} = 16$$



TABASCO

"Educación que genera cambio"



COBATAB
COLEGIO DE BACHILLERES
DE TABASCO

Y la segunda aproximación fue para $t_1 = 0.19$ y $t_2 = 0.21$:

$$\bar{v}_2 = \frac{1.85 - 1.55}{0.21 - 0.19} = 15$$

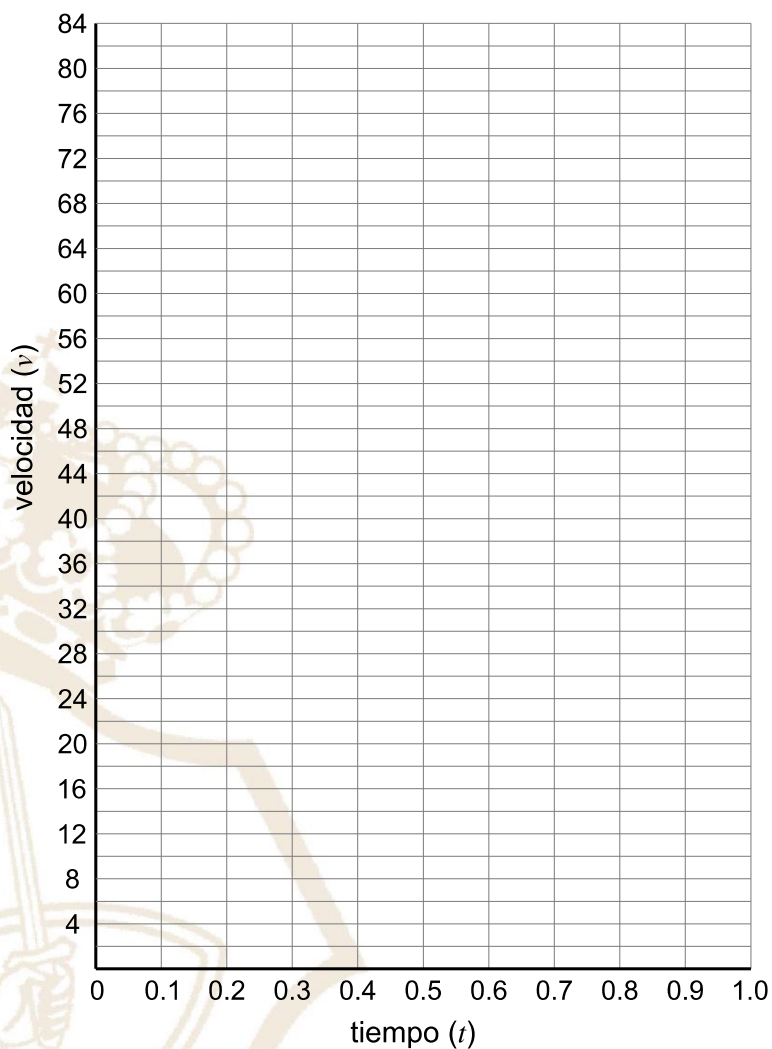


Calcule las velocidades medias de los datos obtenidos y regístrelos en la siguiente tabla, posteriormente elabore la función escalón al igual como lo realizaron Ximena, Tonatiuh e Itzel.

Cálculo de velocidades medias

Tiempo (segundos)	Velocidad (cm/s)
0.0 - 0.1	
0.1 - 0.2	
0.2 - 0.3	
0.3 - 0.4	
0.4 - 0.5	
0.5 - 0.6	
0.6 - 0.7	
0.7 - 0.8	
0.8 - 0.9	
0.9 - 1.0	
1.0 - 1.1	
1.1 - 1.2	
1.2 - 1.3	
1.3 - 1.4	
1.4 - 1.5	

Gráfico velocidad vs tiempo



Calcule las velocidades media alrededor de 0.2 s, 0.7 s y 1.0 s, tomando aproximaciones muy pequeñas, tanto como el video tomado de su smartphone lo permita.

Cálculo de velocidades medias para intervalos de tiempo muy pequeños



TABASCO

"Educación que genera cambio"



COBATAB
COLEGIO DE BACHILLERES
DE TABASCO

Cálculo de velocidades medias para intervalos de tiempo muy pequeños

Así mismo, el docente les indicó que podían calcular la pendiente de la función escalón que habían obtenido, esto tomando cada una de las partes medias del escalón y uniéndolas con su escalón consecutivo, a esta pendiente se le conoce como aceleración media, que es la velocidad media de la velocidad media, y que por la naturaleza de los datos es aproximadamente igual en toda la gráfica.

Para los primeros dos escalones obtuvieron:

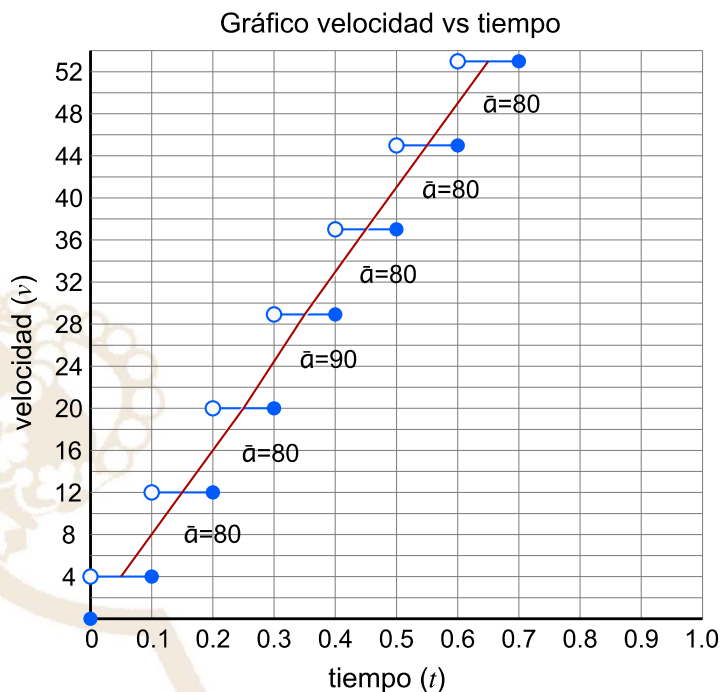
$$\bar{a}_{0.05-0.15} = \frac{12 - 4}{0.15 - 0.05} = 80$$

Para el segundo escalón con el tercer escalón obtuvieron:

$$\bar{a}_{0.15-0.25} = \frac{20 - 12}{0.25 - 0.15} = 80$$

Para el tercer escalón con el cuarto escalón obtuvieron:

$$\bar{a}_{0.25-0.35} = \frac{29 - 20}{0.35 - 0.25} = 90$$



En promedio, la aceleración media ronda los 80 cm/s², esto debido a los errores en la medición, la precisión con la que se mide y algunos redondeos que se hace, pero en general las aceleraciones son aproximadamente iguales para este fenómeno.

El profesor pidió que integraran una tabla y visualizaran los datos como si se tratase de una progresión cuadrática, para poder construir el término general de la progresión y posteriormente convertirla en una función continua, para lo cual Ximena, Tonatihu e Itzel, calcularon los coeficientes de dicha progresión:

Medición	Tiempo (segundos)	Posición (cm)	Velocidad (cm/s)	Aceleración (cm/s ²)
	0.0	0.0		
1	0.1	0.4	4	80
2	0.2	1.6	12	80
3	0.3	3.7	20	90
4	0.4	6.5	29	80
5	0.5	10.2	37	80
6	0.6	14.7	45	80
7	0.7	20.0	53	80
8	0.8	26.2	61	
			Primera diferencia	Segunda diferencia

Recordando que, para una progresión cuadrática, el termino general es:

$$a_n = an^2 + bn + c \Rightarrow x(t) = at^2 + bt + c$$

donde los coeficientes cumplen que

$$2a = \text{Valor de la segunda diferencia}$$

$$3a + b = \text{Valor de la primera diferencia entre el término 1 y el término 2}$$

$$a + b + c = \text{Valor del primer término}$$

El valor de los coeficientes obtenidos por Ximena, Tonatiuh e Itzel son:

$$2a = 80$$

$$a = 40$$

$$3\frac{a}{0.1} + b = 12$$

$$b = 0$$

$$\frac{a}{0.1^2} + \frac{b}{0.1} + c = 0.4$$

$$c = 0$$

Estos coeficientes contienen la información del tamaño del intervalo de tiempo, el coeficiente a contiene información de la aceleración, el coeficiente b contiene información de la velocidad y el c contiene información de la posición inicial, por esa razón fueron divididos por 0.1 y 0.1² según la diferencia a la cual hacen alusión. Por lo tanto, la función posición es:

$$x(t) = 40t^2$$



TABASCO



COBATAB
COLEGIO DE BACHILLERES
DE TABASCO

"Educación que genera cambio"



Calcule las aceleraciones medias y obtenga los coeficientes a , b y c para construir la función posición.

Cálculo de aceleración medias y determinación de la función posición.



TABASCO



COBATAB
COLEGIO DE BACHILLERES
DE TABASCO

"Educación que genera cambio"



Por último, integre lo realizado en un reporte de investigación, construya la conclusión utilizando la función posición, su derivada y las velocidades instantáneas, así mismo, compare las aproximaciones realizadas con la velocidad media y la velocidad instantánea para $t = 0.2, 0.5$ y 1.0 s.

No olvide qué, un reporte de investigación contiene los siguientes elementos:

- a) Hoja de presentación
- b) Resumen
- c) Introducción
- d) Metodología
- e) Datos recabados
- f) Resultados obtenidos
- g) Conclusión



TABASCO

"Educación que genera cambio"



COBATAB
COLEGIO DE BACHILLERES
DE TABASCO

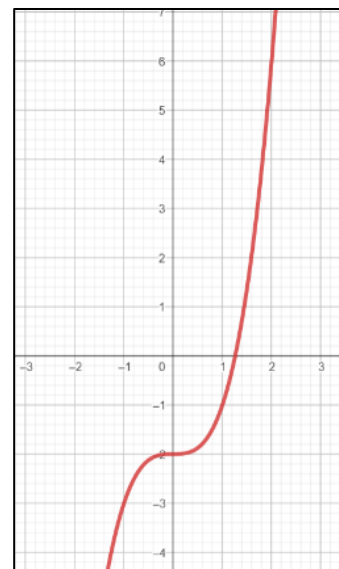
PM3_SA1-EP01

CUESTIONARIO TIPO PLANEA SA 1

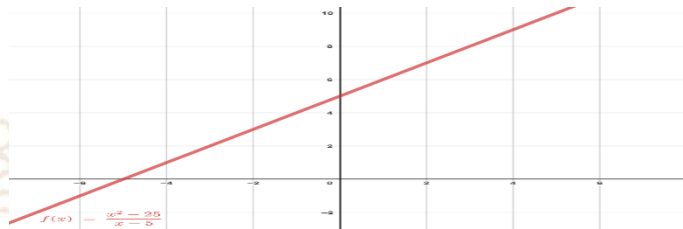
Indicaciones Lee cuidadosamente cada reactivo e individualmente elige la opción de respuesta correcta

1. Se define como al movimiento en el cual un objeto se desplaza en línea recta, en una sola dirección, recorriendo distancias iguales en el mismo intervalo de tiempo, manteniendo en todo su movimiento una velocidad constante y sin aceleración.
 - a) Movimiento acelerado
 - b) Movimiento desacelerado
 - c) Movimiento rectilíneo uniforme
 - d) Movimiento parabólico
2. Es el límite de una función donde la distancia entre el punto inicial y final es cero.
 - a) Cambio
 - b) Tasa de variación promedio
 - c) Tasa de variación instantánea
 - d) Rapidez instantánea.
3. Se define como la razón de cambio de una variable respecto a otra y, es igual a la derivada de una función matemática en un punto:
 - a) Secante
 - b) Tangente
 - c) Pendiente
 - d) Inclinación
4. Suponga que, un móvil se desplaza con velocidad constante y recorre 5 metros cada 4 segundos; calcule su velocidad y la distancia que recorre en 20 segundos:
 - a) 0.8 m/s y 25 m.
 - b) 0.8 m/s y 20 m.
 - c) 1.25 m/s y 25 m.
 - d) 1.25 m/s y 20 m.
5. Encuentra las raíces de las siguientes ecuaciones de segundo grado $x^2 - 2x - 3$
 - a) $x_1 = 3, x_2 = -1$
 - b) $x_1 = -3, x_2 = -1$
 - c) $x_1 = 3, x_2 = 1$
 - e) $x_1 = -3, x_2 = 1$

6. Si $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2x + 3$, cual es el valor de multiplicar $(f \cdot g)(x) =$
- $2x^3 + 3x^2$
 - $x^2 + 2x + 3$
 - $2x^2 + 3x$
 - $2x^3 + 6x^2$
7. Un coche viaja a una velocidad constante de 60 km/h. La distancia d en kilómetros que recorre el coche se puede expresar como $d(t) = 60(t)$, donde t es el tiempo en horas. ¿Cuál es la distancia recorrida después de 2 horas?
- 60 km
 - 100 km
 - 120 km
 - 30 km
8. Para la función cuadrática, $f(x) = -2x^2 + 4x - 1$ ¿cuál es la concavidad de la parábola?
- Cóncava hacia arriba
 - Cóncava hacia abajo
 - No tiene concavidad
 - Depende del valor de x
9. Dada una función $f(x) = x^3 - 1$, determinar el valor de $f(5)$
- 14
 - 124
 - 4
 - 26
10. De acuerdo con la siguiente gráfica, aproxima el siguiente limite $\lim_{x \rightarrow 2} x^3 - 2$
- 2
 - 1
 - 2
 - 6

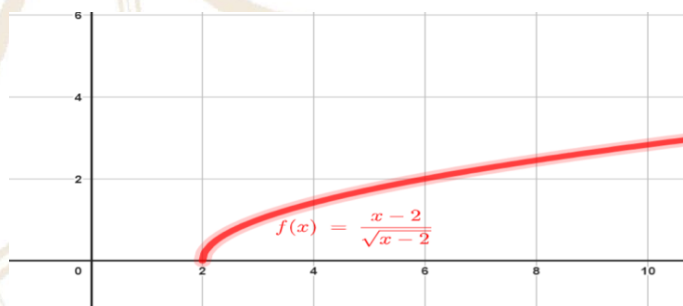


11. Calcula el **límite** de la función racional $\lim_{x \rightarrow 5} f\left(\frac{x^2-25}{x-5}\right)$ cuya grafica se muestra a continuación.



- a) 10
- b) 5
- c) 0
- d) 15

12. Calcula el **límite** de la función racional $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x-2}{\sqrt{x}-2}\right)$



- a) 2
- b) 1
- c) 0
- d) 1.5



TABASCO

COBATAB
COLEGIO DE BACHILLERES
DE TABASCO

"Educación que genera cambio"

PM3-SA1-MA01 Mapa de aprendizaje para evaluar las progresiones de la SA 1

UAC:	Pensamiento Matemático III	Progresiones	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	Fecha:	
Nombre				Grupo:	
				Turno:	

Situación de aprendizaje 1: "Y ¿Cuándo voy a usar esto?"**Mapa de aprendizaje**

1: Necesito ayuda

2: Puedo hacerlo solo

3: Puedo ayudar a otros

Progresión de Aprendizaje	Nivel			Que debo hacer para mejorar:
	1	2	3	
Encuentro de manera heurística algunas reglas de derivación como la regla de la suma, la regla del producto, la regla del cociente y la regla de la cadena y las aplica en algunos ejemplos				
Selecciono una problemática en la que el cambio sea un factor fundamental en su estudio para aplicar el concepto de la derivada como razón de cambio instantánea				
Explico y socializo el papel de la derivada para analizar una función (donde crece/decrece, máximo/mínimos locales, concavidades) y trazo su gráfica				
Resuelvo problemas de su entorno o de otras áreas del conocimiento empleando funciones y aplicando la derivada (ejemplo: problemas de optimización), organizo su procedimiento y lo someto a debate				
Examino la gráfica de funciones logarítmicas con diferentes bases y las gráficas de las funciones exponenciales para describirlas y realizar afirmaciones sobre el significado de que la función exponencial y logarítmica de base "a" sean funciones inversas entre sí				
Analizo y describo un fenómeno en el que la periodicidad sea un constituyente fundamental a través del estudio de propiedades básicas funciones trigonométricas				
Selecciono una problemática, situación o fenómeno tanto real como ficticio para modelarlo utilizando funciones deriva				
Considero y reviso algunas ideas subyacentes al teorema fundamental del cálculo				

Nombre y Firma del estudiante:	Firma del Facilitador

Referencias SA 1

El blog de diego fernando paladines salazar. (2011, mayo 11). El blog de diego fernando paladines salazar. <http://diegofernandopaladines.over-blog.com/article-arquimedes-el-metodo-exhaustivo-historia-y-filosofia-de-las-matematicas-73590171.html>

Cantoral, R., & Farfán, R. M. (2004). Desarrollo conceptual del cálculo. (1ra Edición) México: International Thomson Editores.

SEP. (s/f). Circunferencia y polígonos. Gob.mx. Recuperado el 3 de junio de 2024, de <https://nuevaescolamexicana.sep.gob.mx/detalle-ficha/36957/>

Ortiz, F. J., Ortiz, F. J., & Ortiz, F. J. (2015). Matemáticas 4. (3ra edición) México: Grupo Editorial Patria.

RAZÓN DE CAMBIO. (s/f). CÁLCULO DIFERENCIAL. Recuperado el 8 de junio de 2024, de <https://calculus502.weebly.com/razoacuten-de-cambio>

Jiménez, R. J. (s/f). Tasa de variación media. Iesarangurenabila.com. Recuperado el 8 de junio de 2024, de https://www.iesarangurenabila.com/files/ruben/public/jerezp/tasa_de_variacion_media.html

4.1: Tasas de Cambio Promedio e Instantáneas. (2022, octubre 30). LibreTexts Español; Libretxts. https://espanol.libretexts.org/Educacion_Basica/Calculo/04%3ADiferenciacion-Modelos_de_Pendiente_usando_Derivadas/4.01%3ATasas_de_Cambio_Promedio_e_Instantaneas

Cambio. (s/f). Filosofia.org. Recuperado el 8 de junio de 2024, de <https://www.filosofia.org/enc/ros/cambio.htm>

Romero, S. (2023, abril 18). Este es el origen del símbolo matemático del infinito. Muy Interesante. <https://www.muyinteresante.com/ciencia/15451.html>

Deportescineyotros, P. (2020, enero 21). Grandes científicos de la Grecia Antigua: Arquímedes. deportescineyotros. <https://deportescineyotros.com/2020/01/21/grandes-cientificos-de-la-grecia-antigua-arquimedes/>

Eudoxio de Cnidos. (s/f). Ecured.cu. Recuperado el 8 de junio de 2024, de https://www.ecured.cu/Eudoxio_de_Cnidos

Pierre de Fermat. (2023, agosto 25). Calcular Área. <https://www.calcularareas.com/pierre-de-fermat/>

Pierre de Fermat. (s/f). Biografiasyvidas.com. Recuperado el 9 de junio de 2024, de <https://www.biografiasyvidas.com/biografia/f/fermat.htm>



TABASCO



COBATAB
COLEGIO DE BACHILLERES
DE TABASCO

"Educación que genera cambio"

Leskow, E. C. Leyes de Newton: definición, fundamentos y características. (2017, agosto 16). Recuperado el 9 de junio de 2024, de <https://humanidades.com/leyes-de-newton/>

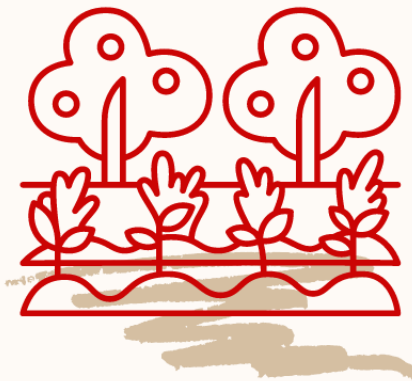
Romero, G. F. (2021, junio 1). Problema 2 - Triángulo de Sierpinsky. Portal Académico del CCH. <https://portalacademico.cch.unam.mx/calculo1/procesos-infinitos/problema-2-triangulo-de-Sierpinsky>

Zill, D. G., & etc. (1985). Cálculo con geometría analítica. Brooks/Cole.

Pérez Montiel, Héctor. 2016. Física II (4a edición). Grupo Editorial Patria.

Pérez Otero, Rita. Matemáticas III. Klik Soluciones Educativas.

D_x



$$\log_b b^x = x$$

$$\frac{d}{dx}(5x) = 5$$



$$\frac{dy}{dx}$$

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE 2

Máximando Ando

Propósito de la SA 2



PROGRESIONES

8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15

En equipos de 5 estudiantes, **elaborar una presentación** utilizando los recursos disponibles (físico y/o digital) **donde se explique a detalle el procedimiento del cálculo de distribución de árboles para una producción máxima** en el huerto escolar y **presentar ante el grupo para su socialización y validación.**

APRENDIZAJES DE TRAYECTORIA

- Valora la aplicación de procedimientos automáticos y algorítmicos, así como la interpretación de sus resultados, para anticipar, encontrar y validar soluciones a problemas matemáticos, de áreas del conocimiento y de su vida personal.
- Adopta procesos de razonamiento matemático tanto intuitivos como formales tales como observar, intuir, conjeturar y argumentar, para relacionar información y obtener conclusiones de problemas (matemáticos, de las ciencias naturales, experimentales y tecnología, sociales, humanidades, y de la vida cotidiana).
- Modela y propone soluciones a problemas tanto teóricos como de su entorno, empleando lenguaje y técnicas matemáticas.
- Explica el planteamiento de posibles soluciones a problemas y la descripción de situaciones en el contexto que les dio origen empleando lenguaje matemático y lo comunica a sus pares para analizar su pertinencia.

PROGRESIONES	Conocimientos (Conceptuales)
8. Encuentra de manera heurística algunas reglas de derivación como la regla de la suma, la regla del producto, la regla del cociente y la regla de la cadena y las aplica en algunos ejemplos. (C2M3, C3M4)	• Reglas de derivación: de la suma, del producto, del cociente, de la cadena. • Aplicación de las reglas y ejemplificación.
9. Selecciona una problemática en la que el cambio sea un factor fundamental en su estudio para aplicar el concepto de la derivada como razón de cambio instantánea. (C2M2)	• Aplicación de la derivada en problemas de contexto referidos a la física, economía, ingeniería, biología, entre otros.
10. Explica y socializa el papel de la derivada para analizar una función (donde crece/decrece, máximo/mínimos locales, concavidades) y traza su gráfica. (C1M3, C2M4, C4M2)	• Obtención e interpretación de máximos, mínimos y concavidad a partir de la modelación gráfica de una problemática.
11. Resuelve problemas de su entorno o de otras áreas del conocimiento empleando funciones y aplicando la derivada (e.g. problemas de optimización), organiza su procedimiento y lo somete a debate. (C2M4, C3M4, C4M2)	• Establecer modelos matemáticos a partir de una problemática. • Cálculo de derivada en problemas de contexto referidos a costos, ingresos, ganancias, costos marginales, entre otros. • Temas adicionales: Aplicación de máximos y mínimos.

12. Examina la gráfica de funciones logarítmicas con diferentes bases y las gráficas de las funciones exponenciales para describirlas y realizar afirmaciones sobre el significado de que la función exponencial y logarítmica de base "a" sean funciones inversas entre sí. (C2M3, C3M2)	• Función exponencial y gráfica de funciones exponenciales. • Propiedades de la función exponencial. • Función logarítmica y gráfica de funciones logarítmicas. • Propiedades de la función logarítmica. • Relación entre la función exponencial y la función logarítmica. • Temas adicionales: Cambio de base de las funciones logarítmicas; ecuaciones exponenciales y logarítmicas.
13. Analiza y describe un fenómeno en el que la periodicidad sea un constituyente fundamental a través del estudio de propiedades básicas funciones trigonométricas. (C2M2, C3M2)	• Uso de las funciones senoidales y cosenoidales en la modelación y graficación (movimiento ondulatorio y oscilatorio). • Función seno y función coseno. • Gráfica de la función seno y la función coseno. • Propiedades de la función seno y función coseno. • Aplicación de la función seno y coseno en el movimiento oscilatorio y el movimiento ondulatorio. • Temas adicionales: Funciones trigonométricas en general.
14. Selecciona una problemática, situación o fenómeno tanto real como ficticio para modelarlo utilizando funciones derivables. (C2M4, C3M2, C4M3)	• La segunda ley de Newton como ecuación que involucra derivadas. • Presentación de modelos matemáticos que involucren a la derivada. • Modelo de decaimiento radioactivo. • Modelo presa-depredador. • Modelo de crecimiento bacteriano.
15. Considera y revisa algunas ideas subyacentes al teorema fundamental del cálculo. (C2M4)	• El cambio acumulado y el área bajo una curva. • Estudio de la distribución normal.

Situación de Aprendizaje 2 (Para abordar en la sesión número 28)

Estrategia Didáctica:	Presentación (física/digital)
Título:	Máximando Ando
Contexto:	El Programa Institucional Hacia la Sostenibilidad (PIHASO) del Colegio de Bachilleres de Tabasco (COBATAB) es una iniciativa que busca fomentar en la comunidad educativa del subsistema, mediante la puesta en marcha de un programa de sostenibilidad, una cultura de responsabilidad personal que contribuya a preservar los recursos naturales, los bienes económicos y los activos sociales, para el bienestar actual y de las futuras generaciones. En el cumplimiento de este objetivo, y alineados desde el año 2020 el Voluntariado del COBATAB lleva a cabo el programa: "Por mí, Por ti, Sembrando con Amor" cuya finalidad de implementación en los Centros Educativos del subsistema es valorar el papel de la familia y de los padres como educadores y ejemplos de vida; así como, promover vínculos familiares a través de la participación y establecimiento de huertos que den sustentabilidad al hogar, a los centros educativos y al entorno. El 25 de septiembre de 2015, los líderes mundiales adoptaron un conjunto de objetivos globales para erradicar la pobreza, proteger el planeta y asegurar la prosperidad para todos como parte de una nueva agenda de desarrollo sostenible (agenda 2030). Para alcanzar estas metas TODOS debemos hacer nuestra parte, aprovechar las bondades de la tierra al mismo tiempo que cuidamos de ella. Desde primer semestre el reto para COBATAB es el desarrollo de huertos escolares que implica trabajo en equipo, aprendizaje para una vida sostenible, así como, el cuidado de nuestro entorno, contemplar las características de nuestro suelo, el área de trabajo, tipos de cultivos y distribución de árboles. Generalmente el problema es poder determinar el número total de árboles para obtener la producción máxima. En un plantel del COBATAB se tiene un huerto que actualmente cuenta con 20 árboles, que produce 500 frutos cada uno. Se calcula que, por cada árbol adicional plantado, la producción de cada árbol disminuye en 10 frutos.
Conflicto cognitivo:	a) ¿Cuál debe ser el número total de árboles que debe tener el huerto para que la producción sea máxima? b) ¿Cuál será esa producción? c) Expresa de la forma más apropiada y entendible los resultados para su socialización en grupo.

Instrumento de Evaluación Situación de Aprendizaje 2

PM3-SA2-RU01 Rúbrica para evaluar la Situación de Aprendizaje 2

COLEGIO DE BACHILLERES DE TABASCO PLANTEL No. _____

PENSAMIENTO MATEMÁTICO III

Datos de identificación					PM3-SA2-RU01
Situación didáctica	Máximando Ando	Bloque de progresiones	2	Progresiones	8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15
Propósito de la situación	En equipos de 5 estudiantes, elaborar una presentación utilizando los recursos disponibles (físico y/o digital) donde se explique a detalle el procedimiento del cálculo de distribución de árboles para una producción máxima en el huerto escolar y presentar ante el grupo para su socialización y validación.				

CATEGORIAS/SUBCATEGORIAS			
CATEGORIAS	SUBCATEGORIAS		
C1 Procedural	C1S1 Elementos variacionales C1S2 Elementos geométricos C1S3 Elementos variacionales		
C2 Procesos de intuición y razonamiento	C2S1 Capacidad para observar y conjeturar C2S2 Pensamiento intuitivo C2S3 Pensamiento formal		
C3 Solución de problemas y modelación	C3S1 Uso de modelos y capacidad para observar y conjeturar C3S2 Pensamiento intuitivo y construcción de modelos C3S3 Estrategias heurísticas y ejecución de procedimientos no rutinarios		
C4 Interacción y lenguaje matemático	C4S1 Registro escrito, simbólico, algebraico e iconográfico C4S2 Negociación de significados C4S3 Ambiente matemático de comunicación		
Nombre de los alumnos			Grupo
	N. Lista:		N. Lista:
	N. Lista:		N. Lista:
	N. Lista:		N. Lista:

Evaluación					
CATEGORÍAS	Puntuación obtenida	Puntuación máxima	Ponderación	Retroalimentación	
C1. Procedural		4	20%	Logros	
C2. Procesos De intuición y razonamiento		4	20%		
C3. Soluciones de problemas y modelación		4	20%		
C4. Interacción y lenguaje matemático		4	20%	Aspectos de mejora	
Actitudinal		4	20%		
TOTAL		20	100%		
Calificación obtenida					

Categoría	NIVEL DE PROGRESO			
	Destacado (4)	Competente (3)	Básico (2)	No presenta (1)
C1. Procedural	Identifica y clasifica todas las variables y constantes para asociarlas creando modelos matemáticos previos completos y exactos.	Identifica y clasifica varias variables y constantes para asociarlas creando modelos matemáticos previos correctos.	Asocia algunas variables y constantes para crear modelos matemáticos previos limitados en precisión.	Asocia pocas variables y constantes para crear modelos matemáticos previos incorrectos.
C2. Solución de problemas y modelación	Asocia modelos preliminares con precisión, reconociendo la necesidad de expresar un producto para representar la producción general y aplica correctamente las fórmulas de derivación.	Asocia modelos preliminares adecuadamente, reconociendo la necesidad de expresar un producto para representar la producción general y aplica correctamente la mayoría de las fórmulas de derivación.	Asocia modelos preliminares de manera básica, comprendiendo la necesidad de expresar un producto para representar la producción general y aplica correctamente algunas de las fórmulas de derivación.	Tiene dificultades para asociar modelos preliminares y no comprende la necesidad de expresar un producto para representar la producción general. Aplica incorrectamente las fórmulas de derivación.
C3. Interacción y lenguaje matemático	Domina la aplicación precisa de los criterios de derivada, identificando máximos y mínimos, y selecciona adecuadamente los modelos para resolver el conflicto cognitivo.	Aplica correctamente los criterios de derivada para identificar máximos y mínimos, y selecciona modelos adecuados en la mayoría de las preguntas del conflicto cognitivo.	Intenta aplicar los criterios de derivada y seleccionar modelos para resolver algunas preguntas del conflicto cognitivo, aunque con algunas dificultades y limitaciones.	Tiene varias dificultades en la aplicación de los criterios de derivada y en la selección de modelos para resolver el conflicto cognitivo.
C4. Interacción y lenguaje matemático	Expresa correctamente la derivada y reconoce con precisión las unidades adecuadas en todo momento, mostrando comprensión completa y habilidad técnica.	Expresa adecuadamente la derivada en la mayoría de los casos y reconoce las unidades apropiadas en la mayoría de las situaciones, con algunos errores ocasionales.	Expresa la derivada con ciertas dificultades en algunos casos, reconociendo las unidades correctas en algunas situaciones, aunque con limitaciones y posibles errores.	Tiene dificultades para expresar correctamente la derivada y comprender las unidades adecuadas para su resultado.
Actitudinal	Trabaja de forma altamente colaborativa, con explicaciones claras y una gran disposición al trabajo organizado y metódico, cumpliendo con todos los criterios del docente.	Trabaja de forma colaborativa, con explicaciones claras y una disposición adecuada al trabajo organizado y metódico, cumpliendo la mayoría de los criterios del docente.	Se relaciona de manera limitada, con explicaciones comprensibles pero algunas imprecisiones, y una disposición inconsistente al trabajo organizado, cumpliendo solo algunos criterios del docente.	Tiene una mínima interacción con sus pares, presentando explicaciones poco claras, una disposición limitada al trabajo organizado, y no cumple con la mayoría de los criterios del docente.

Nombre y Firma del Líder de equipo	Firma del Facilitador

Evaluación Diagnóstica SA2

¿Qué tanto sé? (Apertura) CUESTIONARIO PARA SOCIALIZAR

PM3-SA2-ED01

CUESTIONARIO PARA SOCIALIZAR

1. Es el proceso de hallar la derivada de una función:

- a) Límite.
- b) Derivación.
- c) Tabulación.
- d) Regla de la cadena.

2. Símbolo que se utiliza para identificar la derivada de una función:

- a) $f'(x)$
- b) $\frac{dy}{dx}$
- c) y'
- d) Todas las anteriores.

3. Nos permite calcular el cambio de una variable respecto a otra, en un momento específico.

- a) Valor promedio
- b) Razón de cambio instantánea
- c) Aceleración del tiempo
- d) Función específica

4. Representa la pendiente de una recta tangente cuando se grafican dos variables de las cuales una es dependiente de otra.

- a) Valor promedio
- b) Razón de cambio
- c) Función específica
- d) Razón de cambio instantánea

5. Calcula la segunda derivada de la función $y = 4x^3 + 3x^2 - 5x + 10$

- a) $\frac{d^2y}{dx^2} = 4x^2 + 6x - 5$
- b) $\frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2 + 6x - 5$
- c) $\frac{d^2y}{dx^2} = x^3 + 6x^2 - 5x + 10$
- d) $\frac{d^2y}{dx^2} = 24x + 6$

6. Si la derivada de la función y es $\frac{dy}{dx} = 2x^2 - 5x - 3$, y los números críticos de una función son aquellos valores donde la derivada vale cero, entonces los números críticos de la función f son:

- a) $c_1 = \frac{1}{2}$ $c_2 = -3$
- b) $c_1 = -\frac{1}{2}$ $c_2 = -3$
- c) $c_1 = \frac{1}{2}$ $c_2 = 3$
- d) $c_1 = -\frac{1}{2}$ $c_2 = 3$

CUESTIONARIO PARA SOCIALIZAR

- | | |
|--|--|
| <p>7. Función en la que la variable independiente aparece en forma de exponente.</p> <ul style="list-style-type: none"> a) Exponencial b) Logarítmica c) Polinomial d) Racional | <p>8. Es la función inversa de la función exponencial.</p> <ul style="list-style-type: none"> a) Exponencial b) Logarítmica c) Polinomial d) Racional |
| <p>9. ¿Es una función que tiene curva de arriba hacia abajo (que se repite cada 2π radianes o 360°)?</p> <ul style="list-style-type: none"> a) Secante b) Arco tangente c) Seno d) Todas las anteriores | <p>10. ¿Es la función cuya grafica comienza en 1 y baja hasta -1 en π radianes (180°) y luego vuelve a subir?</p> <ul style="list-style-type: none"> a) Tangente b) Secante c) Seno d) Coseno |
| <p>11. ¿Qué tipo de ecuaciones se utilizan en el modelo presa-depredador?</p> <ul style="list-style-type: none"> a) Ecuaciones cuadráticas. b) Ecuaciones diferenciales. c) Ecuaciones lineales. d) Ecuaciones cúbicas | <p>12. ¿Qué es el modelo presa-depredador?</p> <ul style="list-style-type: none"> a) Un modelo matemático que describe las interacciones entre las poblaciones de presas y depredadores. b) Un modelo de alimentación que muestra cómo los depredadores cazan a sus presas. c) Un modelo de competencia entre diferentes especies en un ecosistema. |
| <p>13. Es el tipo de rectángulo de manera que una parte del mismo pase por encima de la parábola, para aproximar el valor del área bajo curva:</p> <ul style="list-style-type: none"> a) Circunscritos b) Inscritos c) Triangulo Rectángulo. d) Funcionales. | <p>14. Es el tipo de rectángulo de manera que quede por debajo de la parábola, para aproximar el valor del área bajo curva:</p> <ul style="list-style-type: none"> a) Circunscritos. b) Inscritos. c) Triangulo Rectángulo. d) Funcionales. |

PM3-SA2-LC01 Lista de cotejo para evaluar el Portafolio de Evidencias SA2 de las actividades de reforzamiento

Unidad de aprendizaje	2	Grupo		Fecha:	
Progresión	8. Encuentra de manera heurística algunas reglas de derivación como la regla de la suma, la regla del producto, la regla del cociente y la regla de la cadena y las aplica en algunos ejemplos. (C2M3, C3M4) 9. Selecciona una problemática en la que el cambio sea un factor fundamental en su estudio para aplicar el concepto de la derivada como razón de cambio instantánea. (C2M2) 10. Explica y socializa el papel de la derivada para analizar una función (donde crece/decrece, máximo/mínimos locales, concavidades) y traza su gráfica. (C1M3,C2M4, C4M2) 11. Resuelve problemas de su entorno o de otras áreas del conocimiento empleando funciones y aplicando la derivada (e.g. problemas de optimización), organiza su procedimiento y lo somete a debate. (C2M4, C3M4, C4M2) 12. Examina la gráfica de funciones logarítmicas con diferentes bases y las gráficas de las funciones exponenciales para describirlas y realizar afirmaciones sobre el significado de que la función exponencial y logarítmicas de base "a" sean funciones inversas entre sí. (C2M3, C3M2) 13. Analiza y describe un fenómeno en el que la periodicidad sea un constituyente fundamental a través del estudio de propiedades básicas funciones trigonométricas. (C2M2, C3M2) 14. Selecciona una problemática, situación o fenómeno tanto real como ficticio para modelarlo utilizando funciones derivables. (C2M4, C3M2, C4M3) 15. Considera y revisa algunas ideas subyacentes al teorema fundamental del cálculo. (C2M4)				
Meta	C1M3. Comprueba los procedimientos usados en la resolución de problemas utilizando diversos métodos, empleando recursos tecnológicos o la interacción con sus pares. C2M2. Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieren explicación o interpretación. C2M3. Compara hechos, opiniones o afirmaciones para organizarlos en formas lógicas útiles en la solución de problemas y explicación de situaciones y fenómenos. C2M4. Argumenta a favor o en contra de afirmaciones acerca de situaciones, fenómenos o problemas propios de la matemática, de las ciencias o de su contexto. C3M2. Construye un modelo matemático, identificando las variables de interés, con la finalidad de explicar una situación o fenómeno y/o resolver un problema tanto teórico como de su entorno. C3M4. Construye y plantea posibles soluciones a problemas de Áreas de Conocimiento, Recursos Sociocognitivos, Recursos Socioemocionales y de su entorno, empleando técnicas y lenguaje matemático. C4M2. Socializa con sus pares sus conjeturas, descubrimientos o procesos en la solución de un problema tanto teórico como de su entorno. C4M3. Organiza los procedimientos empleados en la solución de un problema a través de argumentos formales para someterlo a debate o a evaluación.				
Categorías	C1 Procedural	Subcategorías	C1S1 Elementos variacionales C1S2 Elementos geométricos C1S3 Elementos variacionales		
	C2 Procesos de intuición y razonamiento		C2S1 Capacidad para observar y conjeturar C2S2 Pensamiento intuitivo C2S3 Pensamiento formal		
	C3 Solución de problemas y modelación		C3S1 Uso de modelos y capacidad para observar y conjeturar C3S2 Pensamiento intuitivo y construcción de modelos C3S3 Estrategias heurísticas y ejecución de procedimientos no rutinarios		
			C4S1 Registro escrito, simbólico, algebraico e iconográfico C4S2 Negociación de significados C4S3 Ambiente matemático de comunicación		
	C4 Interacción y lenguaje matemático				
Nombre de los integrantes					
Aprendizajes Trayectoria					Contenidos Específico
1. Valora la aplicación de procedimientos automáticos y algorítmicos, así como la interpretación de sus resultados, para anticipar, encontrar y validar soluciones a problemas matemáticos, de áreas del conocimiento y de su vida personal.			Reglas de derivación: de la suma, del producto, del cociente, de la cadena. · Aplicación de las reglas y ejemplificación.		
2. Adopta procesos de razonamiento matemático tanto intuitivos como formales tales como observar, intuir, conjeturar y argumentar, para relacionar información y obtener conclusiones de problemas (matemáticos, de las ciencias naturales, experimentales y tecnología, sociales, humanidades y de la vida cotidiana).			· Aplicación de la derivada en problemas de contexto referidos a la física, economía, ingeniería, biología, entre otros. · Obtención e interpretación de máximos, mínimos y concavidad a partir de la modelación gráfica de una problemática.		
3. Modela y propone soluciones a problemas tanto teóricos como de su entorno, empleando lenguaje y técnicas matemáticas.			· Establecer modelos matemáticos a partir de una problemática. · Cálculo de derivada en problemas de contexto referidos a costos, ingresos, ganancias, costos marginales, entre otros. · Temas adicionales: Aplicación de máximos y mínimos.		
4. Explica el planteamiento de posibles soluciones a problemas y la descripción de situaciones en el contexto que les dio origen empleando lenguaje matemático y lo comunica a sus pares para analizar su pertinencia.			· Función exponencial y gráfica de funciones exponenciales. · Propiedades de la función exponencial. · Función logarítmica y gráfica de funciones logarítmicas. · Propiedades de la función logarítmica. · Relación entre la función exponencial y la función logarítmica. · Temas adicionales: Cambio de base de las funciones logarítmicas; ecuaciones exponenciales y logarítmicas. · Uso de las funciones senoidales y cosenoidales en la modelación y graficación (movimiento ondulatorio y oscilatorio). · Función seno y función coseno. · Gráfica de la función seno y la función coseno. · Propiedades de la función seno y función coseno. · Aplicación de la función seno y coseno en el movimiento oscilatorio y el movimiento ondulatorio. · Temas adicionales: Funciones trigonométricas en general. · La segunda ley de Newton como ecuación que involucra derivadas. · Presentación de modelos matemáticos que involucren a la derivada. · Modelo de decaimiento radioactivo. · Modelo presa-depredador. · Modelo de crecimiento bacteriano. · El cambio acumulado y el área bajo una curva. · Estudio de la distribución normal.		



TABASCO



COBATAB
COLEGIO DE BACHILLERES
DE TABASCO

"Educación que genera cambio"

CRITERIOS		%	CUMPLE		Puntaje
			SI	NO	
1.	Presentar el portafolio en la fecha y hora establecidas, mostrando puntualidad y responsabilidad.	10			
2.	Incluye una portada que contenga todos los datos de identificación relevantes, tales como número de plantel, semestre, grupo, bloque, nombre completo, nombre de la Unidad de Aprendizaje Curricular (UAC) y del docente, además de especificar claramente el objetivo de la UAC, la fecha y el lugar.	10			
3.	Presentar una estructura organizada y ordenada de acuerdo con las indicaciones proporcionadas por el docente.	10			
4.	Las actividades incluidas en el portafolio son originales y reflejen el esfuerzo del estudiante, además están presentadas con limpieza y claridad lo que facilita su comprensión.	20			
5.	Contiene todos los trabajos solicitados por el docente, sin omitir ninguno.	20			
6.	Cada trabajo incluido en el portafolio está calificado por el docente y cuenta con su sello o firma, lo que certifica la evaluación realizada.	30			
Calificación					
Aspectos para mejorar					Firma

¡Hola CodaCompañero!

Durante este aprendizaje pon atención a lo que has aprendido con el reforzamiento, revisa los criterios a evaluar y asegúrate de obtener una buena calificación.

Atención a las indicaciones de tu docente. Recuerda que debes volver aquí a revisar lo que se requiere para el PORTAFOLIO DE EVIDENCIAS.

151



SESIÓN 13

Progresión 8

Definición de la Derivada de una función matemática

Imaginemos que hay una función que calcula la posición de un automóvil en el tiempo. La derivada de esta función nos indicará a qué velocidad va el coche en cada momento. Desde una perspectiva geométrica, la derivada de una función es la pendiente de la recta tangente al punto donde se ubica x .

La DERIVADA de una función es el límite que tiende a cero de la razón del incremento de la variable dependiente al incremento de la variable independiente. Es una medida de la rapidez con la que cambia el valor de la función según cambie el valor de su variable independiente. Se representa por el símbolo $\frac{dy}{dx}$, que se lee **"la derivada de y con respecto a x "**.

La derivada de una función se representa como se muestra a continuación:

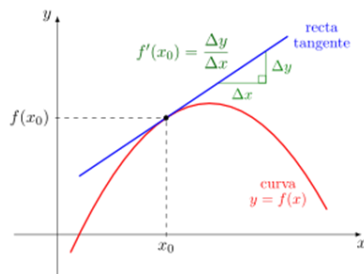
$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Al proceso de hallar la derivada de una función se le conoce como derivación o diferenciación. Existen diferentes formas para representar las derivadas, las cuales se mencionan a continuación:

Símbolo	Cómo se lee
$\frac{d}{dx} f(x)$	"derivada de $f(x)$ con respecto a x "
$\frac{dy}{dx}$	"derivada de y con respecto de x "
y'	" y prima"
$f'(x)$	"función prima de x "
$D_x [y]$	"derivada de y con respecto a x "

Cabe recordar que, en general, la derivada es una función matemática que se define como la tasa de cambio de una variable respecto a otra. Es decir, en qué porcentaje aumenta o disminuye una variable cuando otra también se ha incrementado o disminuido.

La derivada de la función en el punto marcado es equivalente a la pendiente de la recta tangente como se muestra en la siguiente figura.



Quinzacara, C. (2021). *Recta tangente y derivada*. Wikipedia. Recuperado 17 de junio de 2024, de https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Recta_tangente_y_derivada.svg

Para saber más sobre la definición de derivada puedes escanear el siguiente código QR.

Para aprender más



YouTube
¿Qué son las derivadas?

Derivadas de funciones algebraicas:

Es necesario considerar que la regla general de derivación es fundamental, sin embargo, el procedimiento de su aplicación es en ocasiones demasiado extenso y tedioso, por tal motivo, se han deducido de la regla general, reglas especiales para derivar ciertas formas normales que se presentan con frecuencia, las cuales se presentan en la siguiente tabla:

REGLA	FORMULA DE DERIVACIÓN	ENUNCIADO	EJEMPLO	SOLUCIÓN
Derivada de una constante	$\frac{d}{dx}(c) = 0$ Donde c es cualquier número.	La derivada de una constante (número) siempre será cero.	$y = 5$	$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(5)$ $\frac{dy}{dx} = 0$
Derivada de una variable con respecto a sí misma.	$\frac{d}{dx}(x) = 1$	La derivada de una variable con respecto a sí misma es la unidad.	$y = x$	$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x)$ $\frac{dy}{dx} = 1$
Derivada del producto de una constante por una función	$\frac{d}{dx}(cu) = c \frac{d}{dx}(u)$ Donde: c=constante u=función	La derivada del producto de una constante por una función es igual al producto de la constante por la derivada de la función.	$y = 2x$	$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(2x)$ $\frac{dy}{dx} = 2 \frac{d}{dx}(x)$ $\frac{dy}{dx} = 2(1)$ $\frac{dy}{dx} = 2$
Derivada de la potencia de una variable.	$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$	La derivada de la potencia de una variable de exponente constante es igual al producto del exponente por la variable elevada a su exponente disminuido en una unidad.	$y = x^3$	$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3)$ $\frac{dy}{dx} = 3x^{3-1}$ $\frac{dy}{dx} = 3x^2$

Encontrar de forma heurística algunas reglas de derivación

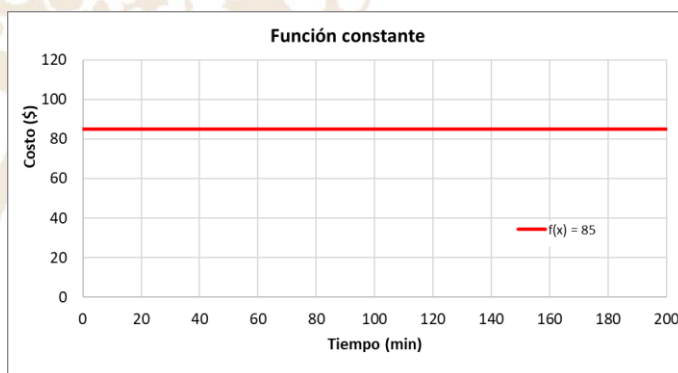
Derivación de la función constante.

Regla: La derivada de una función constante es cero.

$$\frac{d}{dx} c = 0$$

Ejemplo: El precio del boleto para entrar a ver una película en el cine es siempre el mismo, \$85, sin importar cuánto tiempo haya transcurrido ya la película. El precio no cambia con el tiempo, por lo tanto, la "velocidad" del cambio del precio es cero.

La función constante se expresa como $f(x) = c$, donde c representa la constante. De acuerdo con el ejemplo se representaría como $f(x) = 85$. A continuación se muestra la gráfica.



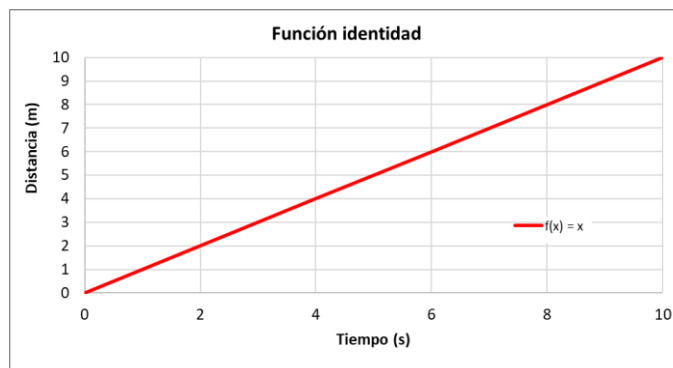
En la gráfica, la línea es horizontal. Esto significa que no importa el valor de x , la altura de la línea (que representa el valor de $f(x)$) es siempre la misma. No hay cambio en y a medida que x cambia por lo tanto podemos observar que la "velocidad" de cambio del precio es cero o que la derivada es 0.

Derivación de la función identidad.

Regla: La derivada de una función identidad es uno.

$$\frac{d}{dx} x = 1$$

Ejemplo: Si caminas en la deportiva de tu municipio a una velocidad constante de 1 metro por segundo, la distancia que has recorrido después de x segundos es exactamente x metros. La "velocidad" del cambio de la distancia es constante y es 1 metro por segundo. De acuerdo con el ejemplo la función quedaría establecida como a continuación se muestra la gráfica.



A partir de la gráfica podemos identificar que se forma una diagonal que sube de manera constante. Esto significa que, por cada incremento en x , y incrementa la misma cantidad o por cada segundo se avanza exactamente 1 metro. Por lo tanto observamos que la velocidad es 1 m/s , entonces la pendiente es 1. En conclusión, la derivada de $f(x) = x$ es 1.

Derivación de una suma de funciones.

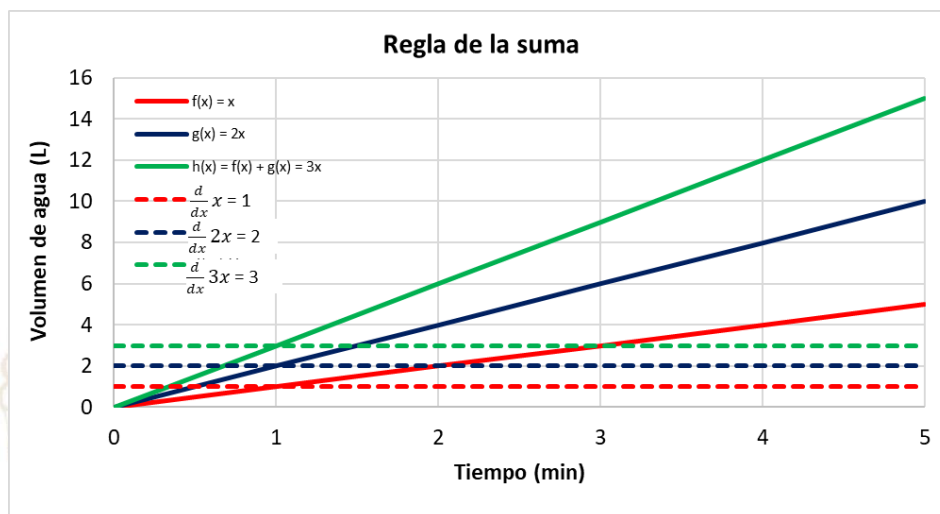
Regla: La derivada de una suma de dos funciones es igual a la suma de las derivadas de dichas funciones.

$$\frac{d}{dx} (U + V - W) = \frac{d}{dx} U + \frac{d}{dx} V - \frac{d}{dx} W$$

Ejemplo. Se miden dos fuentes diferentes de agua llenando un tanque. La cantidad de agua de la primera fuente depende del tiempo como $f(x)$ y la cantidad de la segunda fuente como $g(x)$. Queremos saber cómo cambia el nivel del agua total en el tanque con respecto al tiempo.

Función	Derivada
$f(x) = x$	$\frac{d}{dx} x = 1$
$g(x) = 2x$	$\frac{d}{dx} 2x = 2$
Realizando la suma de las funciones	$\frac{d}{dx} 3x = 3$
$h(x) = f(x) + g(x) = 3x$	
Solo expresando la suma de las funciones	$\frac{d}{dx} (x + 2x) = 3$
$h(x) = f(x) + g(x) = x + 2x$	

Gráficamente podemos observarlo de la siguiente forma.



Comparando las derivadas

- $\frac{d}{dx}(x + 2x) = \frac{d}{dx}x + \frac{d}{dx}2x = 1 + 2 = 3$
- $\frac{d}{dx}3x = 3$

Lo anterior demuestra que la suma de dos funciones es la suma de las derivadas de cada una de esas funciones. Al combinar dos actividades independientes, como llenar un tanque con dos fuentes de agua distintas, el “cambio” total es la suma de los cambios de cada fuente.

Reglas de derivación:

Suma y diferencia algebraica

La regla de la suma establece que la derivada de una suma de funciones es igual a la suma de sus derivadas.

La regla de la diferencia establece que la derivada de la diferencia de funciones es igual a la diferencia de sus derivadas.

Si y es una suma algebraica de funciones, $y = f(x) = u \pm v \pm w$, su derivada será:

$$\frac{d}{dx}(u \pm v \pm w) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx} \pm \frac{dw}{dx}$$

Ejemplo:

$$y = 3x^4 - 7x + 10$$

Solución

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(3x^4 - 7x + 10) = \frac{d}{dx}(3x^4) - \frac{d}{dx}(7x) + \frac{d}{dx}(10) \\ &= 12x^3 - 7 + 0 = 12x^3 - 7\end{aligned}$$

Producto

Si y es el producto de dos funciones, $y = f(x) = uv$, aplicando la regla del producto, su derivada será:

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

La derivada del producto de dos funciones es igual al producto de la primera función por la derivada de la segunda, más el producto de la segunda por la derivada de la primera.

Para utilizar esta regla de derivación, resulta conveniente definir una función del producto como u y la otra como v , y calcular por separado sus derivadas.

Ejemplo:

$$f(x) = y = (3x - 2x^2)(5 - 4x)$$

Solución:

Derivando por separado tenemos:

$$\text{si } u = (3x - 2x^2) \text{ entonces la deriva de } \frac{du}{dx} = 3 - 4x$$

$$\text{si } v = (5 - 4x) \text{ entonces la deriva de } \frac{dv}{dx} = -4$$

Sustituyendo los elementos a la fórmula y dando solución:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(uv) &= u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} \\ \frac{d}{dx}(uv) &= (3x - 2x^2)(-4) + (5 - 4x)(3 - 4x)\end{aligned}$$

Resolviendo tenemos:

$$\frac{d}{dx}(uv) = (-12x + 8x^2) + (15 - 12x - 20x + 16x^2)$$

$$\frac{d}{dx}(uv) = 24x^2 - 44x + 15$$

Cociente de dos funciones

Si y es el cociente de dos funciones, $y = \frac{u}{v}$, su derivada será:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\left(\frac{du}{dx}\right) - u\left(\frac{dv}{dx}\right)}{v^2}$$

La derivada de un cociente es igual producto del denominador (v) por la derivada del numerador ($\frac{du}{dx}$), menos el producto del numerador (u) por la derivada del denominador ($\frac{dv}{dx}$), todo dividido entre el cuadrado del denominador (v^2).

Ejemplo:

$$y = \frac{x}{x^2 + 1}$$

Derivando tenemos:

$$\text{si } u = x \text{ entonces } \frac{du}{dx} = 1$$

$$\text{si } v = x^2 + 1 \text{ entonces } \frac{dv}{dx} = 2x$$

Sustituyendo en la formula tenemos:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{(x^2 + 1)(1) - (x)(2x)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{1 - x^2}{x^4 + 2x^2 + 1}$$

Regla de la cadena

Para derivar una función y , que está compuesta por otras funciones u , v o w , todas ellas dependientes de x , se emplea la **regla de la cadena**.

Por ejemplo, si se quiere derivar la función $y = (2x - 1)^3$ se puede hacer una pequeña sustitución $u = 2x - 1$, reescribiendo la función como $y = u^3$.

Está claro que la derivada de este arreglo estaría con respecto a u , $\frac{dy}{du}$. Pero como la derivada de la función debe estar con respecto a x , se tendría que derivar nuevamente pero solo a la función u . A este arreglo se le conoce como **Regla de la Cadena**.

Sean las funciones: $y = f(u)$ y $u = g(x)$ de manera que $y = f(g(x))$, ambas funciones derivables, entonces: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

La derivada de una función con respecto a x es igual al producto de la derivada de la función con respecto a u , por la derivada de u con respecto a x .

Esta regla permite derivar funciones que se forman por la mezcla de funciones como potencias, productos, cocientes, términos trigonométricos, exponenciales, entre otros.

Ejemplo:

$$y = (5 - x^2)^{10}$$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (5 - x^2)^{10} = 10(5 - x^2)^{10-1} \frac{d}{dx} (5 - x^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = 10(5 - x^2)^9 (-2x)$$

$$\frac{dy}{dx} = -20x(5 - x^2)^9$$



TABASCO

"Educación que genera cambio"



COBATAB
COLEGIO DE BACHILLERES
DE TABASCO

SESIÓN 14

CATEGORIAS

PM3-SA2 ACT01

ACTIVIDAD DE REFORZAMIENTO

C2 Procesos de intuición y razonamiento
C3 Solución de problemas y modelación



Instrucciones: Formados en binas, resuelvan las siguientes derivadas, bajo el monitoreo del facilitador.

Hallar la derivada de las siguientes potencias de funciones usando la regla de la suma, resta, producto, cociente y de la cadena.

1) $y = 2x^3 + 6x + 7$

R: _____

2) $y = 6x^5 - 7x^2 + 8x$

R: _____

3) $y = (x^2 + 4)(2x + 9)$

R: _____

4) $y = \frac{2x}{x+1}$

R: _____

5) $y = (x^2 - 8)^6$

R: _____

SESIÓN 15

Progresión 9

Razón de cambio instantánea

"Lo único constante en la vida es el cambio".
Heráclito

Considerando que todo lo que nos rodea está en movimiento, nos damos cuenta de que un cuerpo u objeto se ha movido cuando ya no está en el mismo lugar que cuando se empezó a observar, es decir, cambió de posición con respecto a otro cuerpo u objeto. El movimiento es un cambio en la posición a partir de un punto de referencia, por lo que es importante describir si hubo un cambio o no de un momento a otro y en función a qué se llevó a cabo.

Las cantidades que intervienen en la mayoría de las actividades que realizamos varían en el transcurso del tiempo, por ejemplo, la distancia que recorre un automóvil en un tiempo determinado, la velocidad que alcanza un balón al transcurrir un periodo, la energía que gasta una persona al realizar una sesión de ejercicio aeróbico, el llenado de agua de un tinaco, entre otros.

Observamos que en la vida diaria se determinan cambios en diversas situaciones de tipo natural, económico, social, etc., variaciones en las que nos interesa conocer cuál es el mínimo o máximo valor, cómo aumenta o disminuye ese valor, en un intervalo de tiempo específico, esto es, cantidades que varían en el transcurso del tiempo. Algunas magnitudes que tienen cambio en el tiempo son la temperatura, el volumen de un fluido, la carga eléctrica, una población de bacterias y muchas más.



Vector freebie. (2015). Niño jugando al fútbol.
Vectorportal. Recuperado 18 de junio de 2024, de
<https://vectorportal.com/es/vector/ni%C3%B1o-jugando-al-f%C3%BAtbol-vector.ai/12896>

Son fenómenos relativos a la variación de una cantidad que depende de otra, por lo que se hace necesario describir y cuantificar estos cambios a través de modelos matemáticos, gráficas y tablas.

Ejemplos de su aplicación en diferentes ciencias.

- *En Biología:* Permite el estudio de evolución de poblaciones de bacterias, de otras especies animales, de plantas... Se han deducido expresiones para el "Número de individuos" (tamaño de la población) según el tipo de crecimiento que presentan.
- *En la Ingeniería:* Para reducir costos al construir un edificio, optimizando los recursos materiales con los que se cuentan.

- *En la Economía:* El estudio de costos e ingresos en función de los beneficios económicos de una empresa para la toma de decisiones.
- *En la Física:* Para calcular la velocidad a la que corre un participante en una carrera atlética desde su inicio hasta su llegada a la meta.

Pensemos en una carrera atlética en donde los participantes compiten en velocidad para completar un determinado trayecto o distancia empleando para ello el menor tiempo posible, o bien recorrer el mayor trayecto posible en cierto tiempo fijo. Además de la gran preparación física y buena condición, hay otros factores que intervienen para que se obtengan los resultados esperados como son la distancia por recorrer, el tiempo, la velocidad del corredor, las condiciones climáticas entre otras. Esto se percibe en el desarrollo que tiene el participante durante la carrera. De esta forma, podemos entender que durante el recorrido la velocidad generada por el corredor puede presentar cambios a partir del arranque de la carrera, durante el trayecto y hasta la llegada a la meta.



La Razón de cambio instantánea es la medida que nos indica cómo se modifica o cambia una variable en relación con otra. Se trata de la magnitud que confronta dos variables a partir de sus unidades de cambio. La razón de cambio es igual a cero cuando las variables no están relacionadas.

La razón de cambio más frecuente es la velocidad, que se calcula dividiendo un trayecto recorrido por una unidad de tiempo. Esto quiere decir que la velocidad se entiende a partir del vínculo que se establece entre la distancia y el tiempo. Podemos determinar cuál es la velocidad de acuerdo con cómo se modifica la distancia recorrida en el tiempo por el movimiento de un objeto.

Un cambio en una magnitud x , se denota con la letra griega Δ (se lee "delta") y se escribe Δx . Representa lo que cambia x , mediante la diferencia entre un valor final y otro inicial: $\Delta x = x_{final} - x_{inicial}$. Si la magnitud x está relacionada con otra magnitud y , esta también experimenta un cambio, llamado $\Delta y = y_{final} - y_{inicial}$

x_1 = valor inicial de x .

x_2 = valor final de x .

y_1 = valor inicial de y .

y_2 = valor final de y .

Cambio en x : $\Delta x = x_2 - x_1$

Cambio en y : $\Delta y = y_2 - y_1$

La razón de cambio de la variable dependiente y con respecto a la variable independiente x , se le conoce como la **Razón de Cambio Promedio (RCP)** y se define con el cociente:

$$RCP = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

La razón de cambio puede ser positiva o negativa, según la variación de las magnitudes involucradas, ya que estas pueden aumentar o disminuir. Si x y y aumentan, significa que los cambios en ambos fueron del mismo signo y que la razón de cambio es positiva.

Sin embargo, cuando la razón de cambio es negativa, significa que una de las magnitudes aumentó y la otra disminuyó.

Cuando se calcula la pendiente (m) de la recta secante (razón de cambio), ésta tiene un valor positivo para los intervalos donde la función es creciente ($m > 0$). Vale cero para los intervalos donde la función es constante ($m = 0$). Es negativa para los intervalos donde la función es decreciente ($m < 0$).

La **Razón de Cambio Instantánea** es el límite de la (RCP) cuando Δx tiende a ser cero. Es decir, al cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ cuando $\Delta x \rightarrow 0 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ que nos permite calcular la razón de cambio de una función prácticamente en cualquier instante o momento específico.

La razón de cambio instantáneo (**RCI**) es la derivada de la función en el punto inicial.

$$RCI = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

La tasa o razón de cambio instantánea también es igual a la pendiente de una recta, pero se refiere a la pendiente de la recta tangente a la gráfica de y vs x .

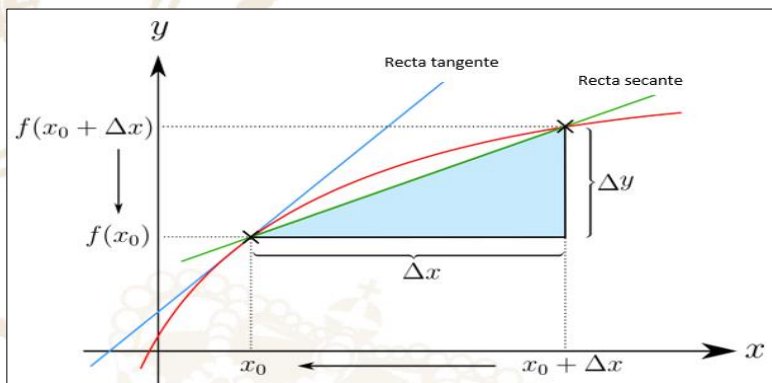
Recta tangente: es la posición límite de las rectas secantes cuando Δx tiende a cero.

Es preciso hacer que la variación Δx se haga sumamente pequeña, tendiendo a 0 (pero sin llegar a ser 0, pues la división entre 0 no está definida).

A esto se le llama “tomar el límite”, y en tal caso, la razón de cambio instantánea pasa a llamarse la “derivada” de y con respecto de x , se denota como:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

No olvidemos que la derivada de una función nos indica el ritmo con el que dicha función varía (crece, decrece o permanece constante) cuando se producen pequeños cambios en la variable independiente.



Schneider, J. (2015). Cociente diferencial de una función. Wikipedia. Recuperado 18 de junio de 2024, de https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Differential_quotient_of_a_function.svg

Ejemplo 1. Suponga que un técnico deja caer un objeto desde una torre, 450 m arriba del suelo.
¿Cuál es la velocidad a los 5 segundos?

Solución:

a) Aplicar la ecuación de desplazamiento donde s = distancia el desplazamiento del objeto.

Constante de gravedad $g = 9.81 \frac{m}{s^2}$

$t=5s$

$$s(t) = \frac{1}{2} g t^2 = \left(\frac{1}{2}\right) * (9.81)t^2 \cong 4.9 t^2$$

$$s(t) = 4.9 t^2$$

Primer método. La razón de cambio vista como la pendiente de la recta tangente a este punto de esta función es lo siguiente:

$$m = \frac{ds}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Todo esto en sustitución:

$$\frac{ds}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4.9 (5+h)^2 - 4.9 (5)^2}{h}$$

$$\frac{ds}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4.9 (25 + 10h + h^2) - 4.9 (5)^2}{h}$$

$$\frac{ds}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4.9 (25) + 49h + 4.9 h^2 - (4.9)(25)}{h}$$

$$\frac{ds}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{49h + 4.9 h^2}{h}$$

$$\frac{ds}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(49 + 4.9h)}{h}$$

$$\frac{ds}{dt} = 49 + 4.9(0)$$

$$\frac{ds}{dt} = 49$$

Por lo tanto, la velocidad instantánea a los 5s es de $49 \frac{m}{s}$



Un **binomio al cuadrado** es

igual al cuadrado del primero,

más el doble del primero por

el segundo, más el cuadrado

del segundo.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Segundo método . Aplicando directamente las fórmulas de derivación.

Función de la distancia con respecto del tiempo.

$$s(t) = 4.9 t^2$$

Al derivar la fórmula anterior podemos obtener una fórmula que nos permitirá calcular la velocidad instantánea en un momento específico.

$$\frac{ds}{dt} = 4.9 \frac{d}{dt} t^2$$

$$\frac{ds}{dt} = 4.9 (2) t^{2-1}$$

$$\frac{ds}{dt} = 9.8 t$$

Ahora sustituimos el tiempo que en este caso serían 5s

$$\frac{ds}{dt} = 9.8 (5)$$

$$\frac{ds}{dt} = 49$$

Por lo tanto, la velocidad instantánea a los 5s es de $49 \frac{m}{s}$

Ejemplo 2. Don José Custodio ha tenido un saldo durante los últimos 8 meses en su cuenta de banco que se describe con la siguiente función $y = -26x^2 + 86x + 4$.

- A) ¿Con qué velocidad cambió su saldo a los cinco meses?
- B) ¿Su saldo incrementaba o se reducía?

A) Para determinar la velocidad instantánea primero derivamos.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (-26x^2) + \frac{d}{dx} (86x) + \frac{d}{dx} (4)$$

$$\frac{dy}{dx} = -26 \frac{d}{dx} x^2 + 86 \frac{d}{dx} x + \frac{d}{dx} 4$$

$$\frac{dy}{dx} = -26(2)x^{2-1} + 86(1) + (0)$$

$$\frac{dy}{dx} = -52x + 86$$

Ya que se posee la función de velocidad instantánea o la derivada podemos sustituir el valor del tiempo, que en este caso es de 5 meses.

$$\frac{dy}{dx} = -52 + (5)86$$

$$\frac{dy}{dx} = 378$$

Por lo tanto la velocidad de cambio de saldo a los cinco meses era de 378 pesos /mes

- B) Dado que la derivada es positiva podemos deducir que en ese momento su saldo **aumentaba.**

SESIÓN 16

CATEGORIAS

PM3-SA2 ACT02

ACTIVIDAD DE REFORZAMIENTO

C3 Solución de problemas y modelación



Instrucciones: En binas realicen la lectura "Razón de cambio instantánea" analicen la información, investiguen en otras fuentes y elaboren un cuadro con la información que se solicita.

APLICACIÓN DE LA DERIVADA COMO RAZÓN DE CAMBIO			
ÁREA	IMPORTANCIA	UTILIDAD	EJEMPLO DE APLICACIÓN RESUELTO
FÍSICA 			
INGENIERÍA 			
ECONOMÍA 			
BIOLOGÍA 			
OTRO 			

SESIÓN 17

Progresión 10

Criterio de la primera derivada

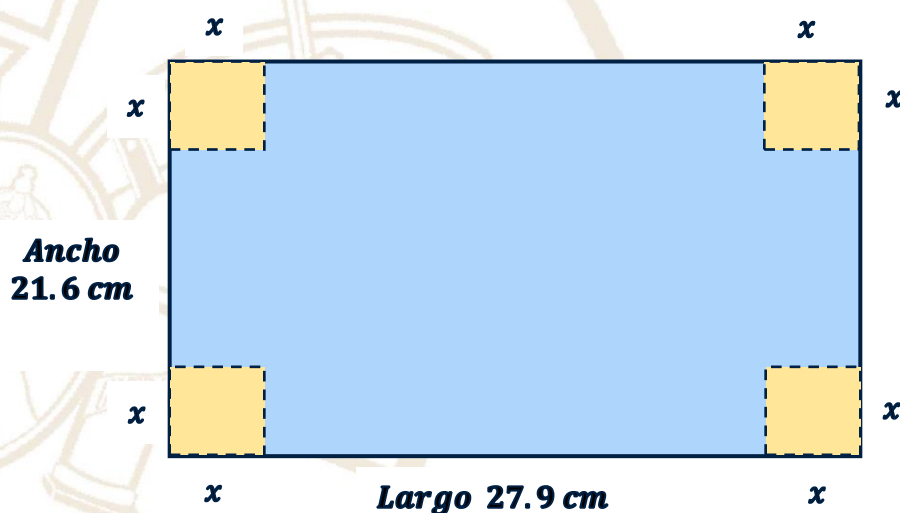
Llémoslo a la vida real...

Opcional

El ser humano siempre ha tenido la necesidad de transportar sus cultivos, productos de un lado a otro y para ello ha utilizado vasijas, hojas, vidrio, madera y muchos otros materiales más. Este recurso de empaquetado es conocido como embalaje, ¿SABES QUE ES EL EMBALAJE Y POR QUE ES IMPORTANTE HOY EN DIA? El embalaje es la acción o efecto de embalar (disponer en balas o dentro de cubiertas) y para esto se espera optimizar la menor parte de recursos materiales, existen muchos retos que se presentan en la vida real, como por ejemplo, un pintor desea saber que cantidad mínima de pintura poder usar por cada metro cuadrado de superficie a pintar, un agricultor desea aplicar la menor dosis de fertilizante sobre una planta a nutrir, ambos ejemplos refieren a poder involucrar una función que dé respuesta al problema. Es así como el cálculo está inmerso en nuestra vida diaria y presente ante los retos de nuestra vida cotidiana.

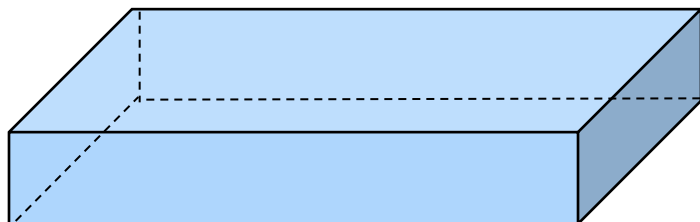
¿Podrías maximizar el volumen de una caja construida a partir de una hoja de tu libreta?, ¿Cuál sería este volumen?

Toma 5 hojas blancas, de la cuales cortarás cuadritos idénticos a partir de las cuatro esquinas, y se doblan los lados hacia arriba, como se muestra en la siguiente figura



Esta actividad la pueden realizar en forma grupal considerando integrantes de máximo de 6 integrantes. Por cada hoja, realiza trazos de cuadrados que midan de lado 2,3,4,5,y 6 cm

respectivamente, en cada una de las esquinas, después de trazar los cuadros, realizar los cortes de modo que las puedas unir a lo largo y a lo ancho de la hoja y esta se doble para formar cinco cajas sin tapas, como se muestra en la siguiente figura.



Una vez elaborada las cajas deben determinar el volumen de cada una de ellas y analizar si hay cambios en el volumen de una a otra caja. Recuerda para calcular el volumen de una caja basta multiplicar sus tres dimensiones, largo, ancho y alto. Se sugiere apoyarte de la siguiente tabla y complementar la información con las cajas formadas.

Altura de la caja	Largo de la caja	Ancho de la caja	Volumen de la caja
Valores de x	$27.9 - 2x$	$21.6 - 2x$	(largo)(alto)(ancho)
1			
2			
3			
4			
5			

Con los datos de la tabla podemos analizar lo siguiente:

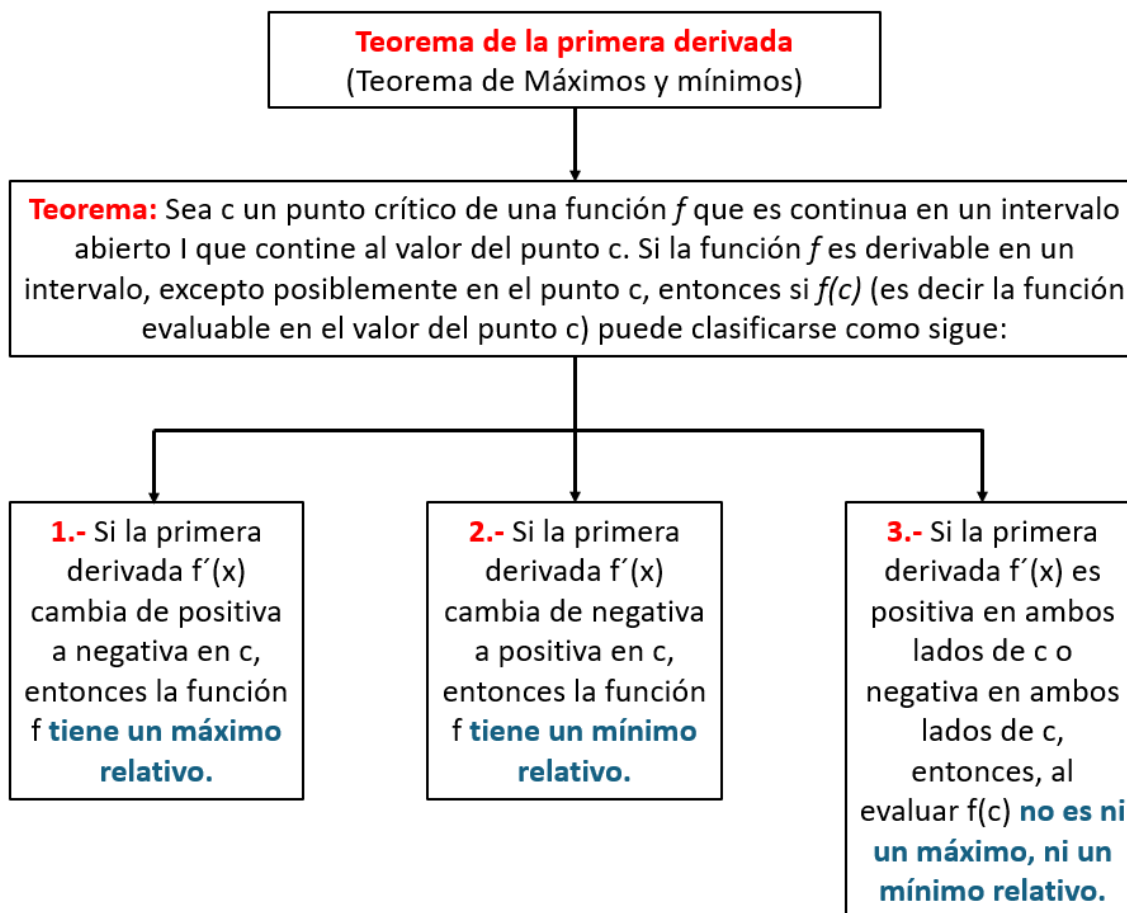
- 1.- ¿Qué dimensiones de la tabla me permiten obtener mayor volumen?
- 2.- ¿Existirá otra dimensión que me permita obtener un máximo volumen?
- 3.- ¿Cuál es el máximo valor que le podemos dar al cuadrado?

Finalmente grafica los puntos y determina la gráfica que representa la ecuación; considera que los valores del lado de los cuadros son para el eje x y para el eje y serán los valores del volumen.

FUNCION CRECIENTE Y DECRECIENTE, MAXIMOS Y MINIMOS

La derivación de funciones es una herramienta muy poderosa que, asociada a la metodología del criterio de la primera derivada, permite encontrar los valores máximos y mínimos de una función. Para comprender este proceso, es necesario relacionarlo a la interpretación geométrica de la derivada.

Pero para que se explique mejor, existe un teorema que es de gran utilidad para determinar en qué intervalo la función es creciente y/o decreciente, además de saber dónde hay un máximo o mínimo local, es el Teorema de la Primera Derivada, el cual dice:



Veamos cómo se aplica este criterio en el siguiente ejemplo:

Ejemplo: Hallar los intervalos donde la función es creciente o decreciente, donde tiene máximos y/o mínimos locales.

a) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 1$

El procedimiento para calcular la primera derivada queda como sigue:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3) - \frac{d}{dx}(4x^2) + \frac{d}{dx}(5x) - \frac{d}{dx}(1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3) - 4 \frac{d}{dx}(x^2) + 5 \frac{d}{dx}(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 8x + 5$$

- Calculamos la derivada de la función $f(x)$.

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 8x + 5$$

Que da como resultado una función cuadrática.

Buscamos los números críticos c .

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

$$3x^2 - 8x + 5 = 0$$

$$a = 3, \quad b = -8, \quad c = 5$$

Usamos la Fórmula General

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

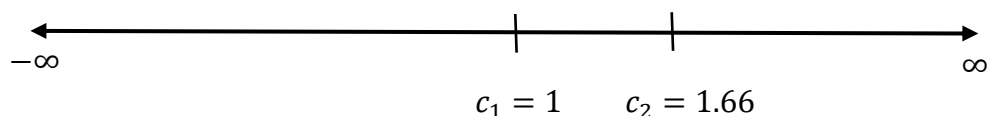
$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(3)(5)}}{2(3)} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 60}}{6} = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{6} = \frac{8 \pm 2}{6}$$

$$x_1 = \frac{8 + 2}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} \approx 1.66$$

$$x_2 = \frac{8 - 2}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

Éstos son los números críticos $c_1 = 1$ y $c_2 = 1.66$

- Fraccionamos la Recta Real: Colocamos los números críticos en la recta real y con esto, seccionamos la recta en intervalos:

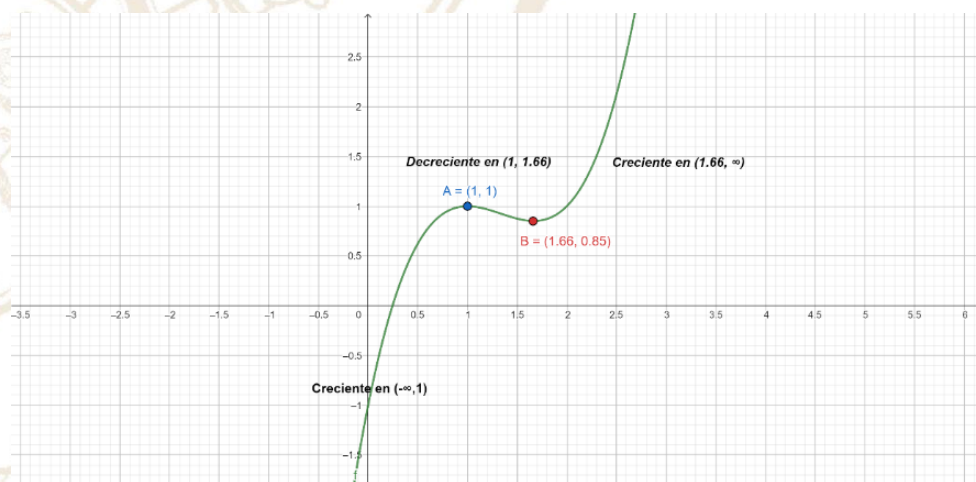


INTERVALOS: $(-\infty, 1)$ $(1, 1.66)$ $(1.66, \infty)$

Con esta información, se procede a llenar el siguiente cuadro, realizando las operaciones pertinentes.

INTERVALOS	$(-\infty, 1)$	$(1, 1.66)$	$(1.66, \infty)$
Valor de prueba k	0	1.5	2
$f'(k)$	5	-0.25	1
Signo de $f'(k)$	Positivo (+)	Negativo (-)	Positivo (+)
Comportamiento (Creciente o Decreciente)	Creciente	Decreciente	Creciente
Comportamiento (Máximo o Mínimo)	Máximo en $c = 1$ y vale $f(1) = 1$ $P. Max = (1, 1)$		Mínimo en $c = 1.66$ y vale $f(1.66) = 0.85$ $P. Min = (1.66, 0.85)$

NOTA: El valor de prueba k es un valor que se propone, siempre y cuando pertenezca al intervalo que se está analizando; así, $0 \in (-\infty, 1)$, $1.5 \in (1, 1.66)$ y $2 \in (1.66, \infty)$. Estos valores k se evalúan en la derivada de f , por lo que $f'(0) = 5$, $f'(1.5) = -0.25$ y $f'(2) = 1$.



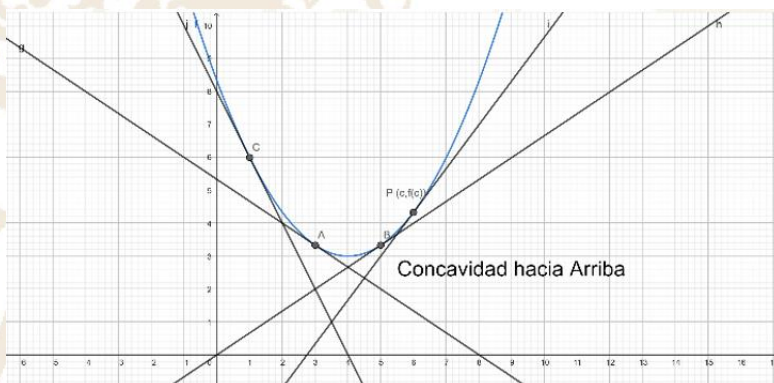
Criterio de la segunda derivada

FUNCION CÓNCAVA Y CONVEXA, MAXIMOS Y MINIMOS

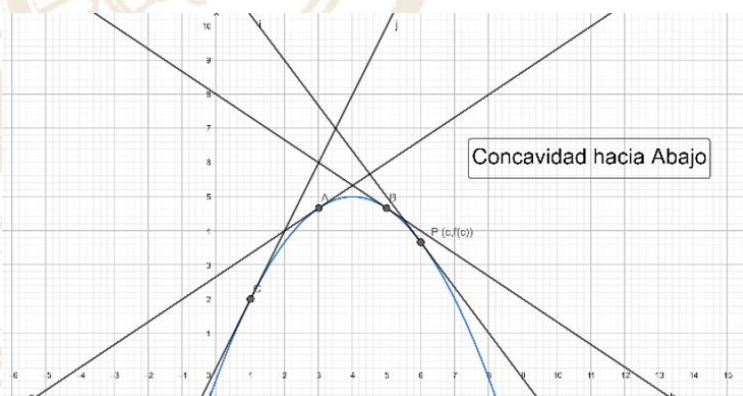
A continuación, se presentan las aportaciones que tiene la segunda derivada de una función, la cual nos permitirá tener una mejor idea de la gráfica de la función, ya que podremos determinar los intervalos en los que es Cóncava hacia arriba y Cóncava hacia abajo, así como encontrar los máximos y mínimos de esta.

DEFINICIÓN: Sea f una función que es derivable en un número c .

- a) La gráfica de f tiene una concavidad hacia arriba en el punto $P(c, f(c))$ si existe un intervalo abierto (a, b) que contiene a c , tal que en (a, b) la gráfica de f está por encima de la recta tangente en P .



La gráfica de f tiene una concavidad hacia abajo en el punto $P(c, f(c))$ si existe un intervalo abierto (a, b) que contiene a c , tal que en (a, b) la gráfica de f está por debajo de la recta tangente en P .



DEFINICIÓN: Un punto de inflexión $P(k, f(k))$ es un punto de inflexión de f , si la gráfica de la función cambia de concavidad (De cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo, o viceversa).

Para hallar los puntos de inflexión de una función f , se iguala la segunda derivada a cero y se resuelve la ecuación para x . Los resultados obtenidos serán las abscisas de los puntos de inflexión, para hallar la ordenada de este punto, se evalúa la función en esos valores.



Criterio de la Segunda Derivada para Concavidad:

Sea $y = f(x)$ una función derivable en un intervalo abierto (a, b) .

- ✓ Si $\frac{d^2y}{dx^2}(x_i) > 0$, para todo x_i que pertenezca a (a, b) , entonces y es cóncava hacia arriba en (a, b) .
- ✓ Si $\frac{d^2y}{dx^2}(x_i) < 0$, para todo x_i que pertenezca a (a, b) , entonces y es cóncava hacia abajo en (a, b) .

Criterio de la Segunda Derivada para Máximos y Mínimos:

Sea $y = f(x)$ una función derivable en un intervalo abierto (a, b) que contiene al número crítico c .

- Si $\frac{d^2y}{dx^2}(c) < 0$, entonces y tiene un máximo local en c , y vale $y(c)$. El punto sobre la gráfica donde se encuentra el máximo es $P(c, y(c))$.
- Si $\frac{d^2y}{dx^2}(c) > 0$, entonces y tiene un mínimo local en c , y vale $y(c)$. El punto sobre la gráfica donde se encuentra el mínimo es $P(c, y(c))$.

Apliquemos este criterio al ejemplo inicial, para determinar la concavidad, los máximos y mínimos.

a) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 1$

Al momento, tenemos la derivada de la función y los números críticos:

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 5$$

$$c_1 = 1 \quad y \quad c_2 = 1.66$$

- Calculamos la segunda derivada de la función. Esta se obtiene derivando la derivada de f , y se denota como $f''(x)$

$$f''(x) = 6x - 8$$

- Igualamos a cero la segunda derivada para hallar los puntos de inflexión:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ 6x - 8 &= 0 \\ 6x &= 8 \\ x &= \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \approx 1.33 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(1.33) &= (1.33)^3 - 4(1.33)^2 + 5(1.33) - 1 \\ f(1.33) &= 2.35 - 7.075 + 6.65 - 1 \\ f(1.33) &= 0.93 \end{aligned}$$

El punto de Inflexión es $P(1.33, 0.93)$

- Fraccionamos la Recta Real: Colocamos la abscisa del punto de inflexión en la recta real y con esto, seccionamos la recta en intervalos:



Nuevamente, procedemos al llenado de un cuadro en el que veamos el comportamiento de la función.

INTERVALOS	$(-\infty, 1.33)$	$(1.33, \infty)$
Valor de prueba k	0	2
$f''(k)$	-8	4
Signo de $f''(k)$	Negativo (-)	Positivo (+)
Comportamiento Concavidad (Arriba o Abajo)	Cóncava hacia abajo	Cóncava hacia arriba

NOTA: El valor de prueba k es un valor que se propone, siempre y cuando pertenezca al intervalo que se está analizando; así, $0 \in (-\infty, 1.33)$ y $2 \in (1.33, \infty)$. Estos valores k se evalúan en la segunda derivada, por lo que $f''(0) = -8$ y $\frac{d^2y}{dx^2} = f''(2) = 4$.

Ahora apliquemos el criterio de la segunda derivada para máximos y mínimos, para ello, evaluamos la segunda derivada en los números críticos y analicemos su signo:

$$f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 8$$

$$f''(c_1) = f''(1) = 6(1) - 8 = 6 - 8 = -2$$

$$f''(1) = -2 < 0$$

Por lo tanto f tiene un máximo en $c_1 = 1$, y vale

$$f(1) = (1)^3 - 4(1)^2 + 5(1) - 1 = 1$$

P. Max = (1, 1)

$$f''(x) = 6x - 8$$

$$f''(c_2) = f''(1.66) = 6(1.66) - 8 = 9.96 - 8 = 1.96$$

$$f''(1.66) = 1.96 > 0$$

Por lo tanto f tiene un mínimo en $c_2 = 1.66$, y vale

$$f(1.66) = (1.66)^3 - 4(1.66)^2 + 5(1.66) - 1 = 0.85$$

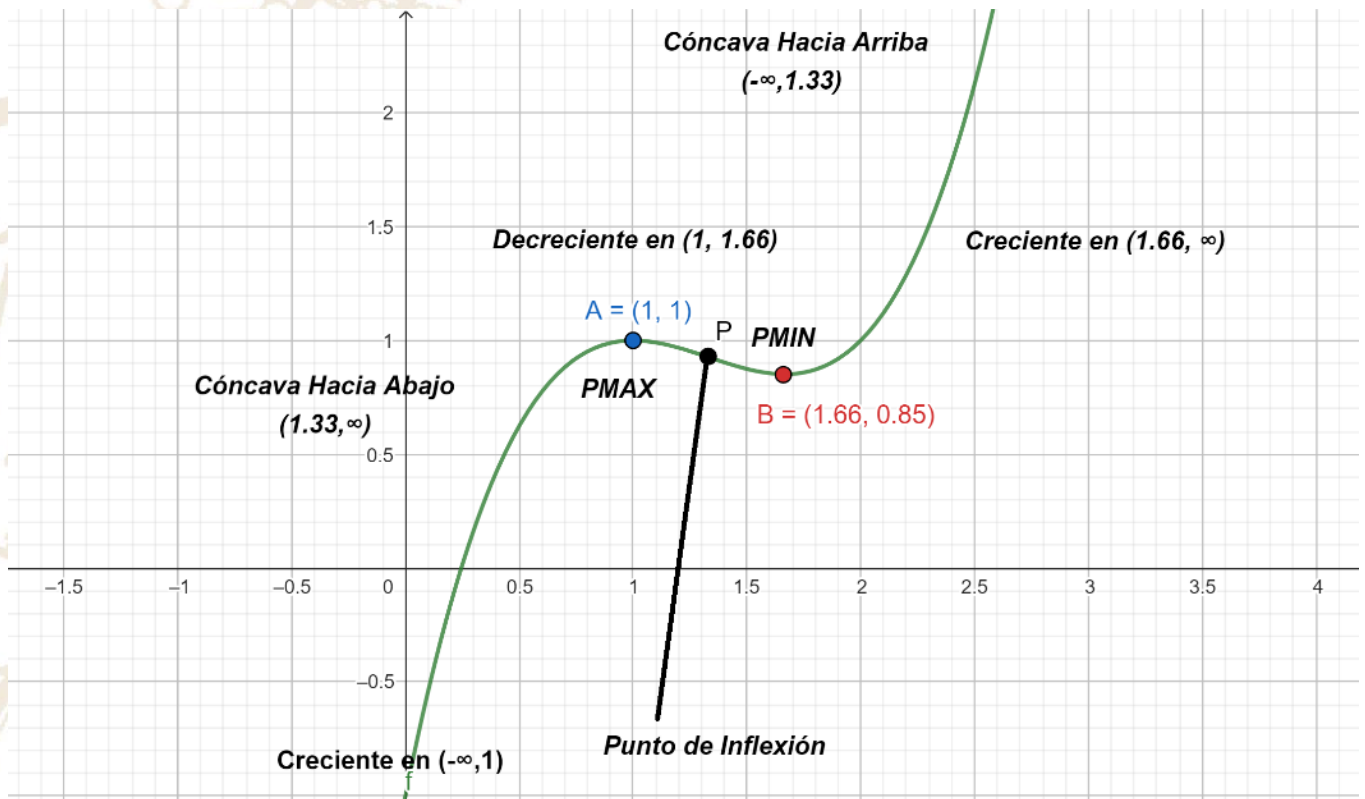
P. Min = (1.66, 0.85)

Gráfica elaborada por: Profr. Manolo Martínez Fajardo, Plantel No.35 23/Mayo/2024.

Función cuadrática:

Llamamos función cuadrática a toda función de la forma $y = f(x) = ax^2 + bx + c$

La gráfica de la función cuadrática es una parábola que abre hacia arriba si $a > 0$, o abre hacia abajo si $a < 0$



Cuando se desea conocer la manera de optimizar los recursos, se puede recurrir al estudio de los máximos y mínimos, una forma de aplicarlo es siguiendo los siguientes pasos.

1. Se bosqueja el problema planteado para darle interpretación.
2. Se escribe la función para obtener el máximo y el mínimo.
3. Se expresa la función en términos de una sola variable.
4. Se deriva la ecuación y se iguala a cero, para determinar los valores críticos.
5. Se obtiene la segunda derivada y sustituimos los puntos críticos para aplicar el teorema.
6. Si $f'(x) = 0$ y $f''(x) > 0$, entonces la función tiene un mínimo.
7. Si $f'(x) = 0$ y $f''(x) < 0$, entonces la función tiene un máximo.

SESIÓN 18

EJEMPLO SIMILAR A LA SITUACIÓN DIDÁCTICA

En el huerto de Don José, ubicado en Tabasco, hay actualmente 30 árboles de mango. Cada uno de estos árboles produce 200 frutos de mango. Don José ha observado que por cada nuevo árbol que planta en su huerto, la producción de cada árbol existente disminuye en 5 frutos de mango debido al aumento en la competencia por recursos como la luz solar y los nutrientes del suelo. Él desea saber cuántos árboles más debe plantar para maximizar la producción total de mangos en su huerto.

- ¿Cuál debe ser el número total de árboles que debe tener el huerto para que la producción de frutos de mango sea máxima?
- ¿Cuál será esa producción?

Primero se identifican los datos.

Árboles iniciales: 30

Frutos de mango producidos inicialmente por cada árbol: 200

Disminución de frutos de cada árbol debido a un árbol adicional: 5

Árboles adicionales: x

El **número total de árboles** es igual a los 30 iniciales más la cantidad de árboles adicionales. Tal como se muestra a continuación.

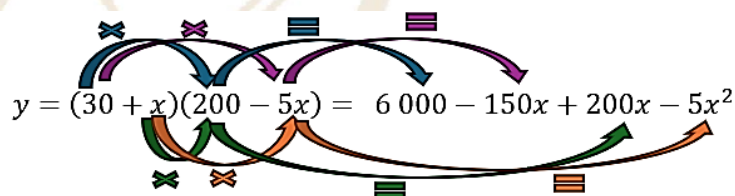
$$30 + x$$

La **producción o número de frutos por árbol** cuando hay x árboles adicionales se representa de la siguiente manera.

$$200 - 5x$$

Para obtener la **producción general o la cantidad de frutos totales** se multiplica el **número total de árboles** por la **producción o número de frutos por árbol** cuando hay x árboles adicionales. La representación y operación algebraica quedaría de la siguiente forma.

$$y = (30 + x)(200 - 5x)$$



$$y = (30 + x)(200 - 5x) = 6\,000 - 150x + 200x - 5x^2$$

Después, se reducen los términos semejantes.

$$y = 6\,000 - 150x + 200x - 5x^2$$

$$y = 6\,000 + 50x - 5x^2$$

Para determinar la cantidad de árboles adicionales que se necesitan para obtener la producción total máxima **derivamos** la función anterior.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} (6000 + 50x - 5x^2) \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} 6000 + \frac{d}{dx} 50x - \frac{d}{dx} 5x^2 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} 6000 + 50 \frac{d}{dx} x - 5 \frac{d}{dx} x^2 \\ \frac{dy}{dx} &= 0 + 50(1) - 2(5)x^{2-1} \\ \frac{dy}{dx} &= 50 - 10x\end{aligned}$$

Después se iguala la derivada a cero para determinar el valor de **x** en donde la pendiente es horizontal indicando que existe un posible máximo o mínimo. A este se le conoce como punto o puntos críticos.

$$50 - 10x = 0$$

Se resuelve la ecuación anterior.

$$\begin{aligned}-10x &= -50 \\ x &= \frac{-50}{-10}\end{aligned}$$

$$x = 5$$

Por lo tanto, en $x=5$ hay un máximo o un mínimo, para comprobar que se trata de un máximo usamos el criterio de la segunda derivada.

Recordando que la primera derivada es:

$$\frac{dy}{dx} = 50 - 10x$$

La segunda derivada sería:

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} (50 - 10x) \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} 50 - \frac{d}{dx} 10x \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} 50 - 10 \frac{d}{dx} x \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= 0 - 10(1)\end{aligned}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -10$$

Como el resultado anterior es negativo entonces se comprueba que en **$x=5$** se tiene **un máximo**. Por lo tanto, la cantidad de **árboles adicionales** para obtener una producción máxima es cinco.

Con base en los resultados anteriores se da respuesta a las preguntas del conflicto cognitivo.
¿Cuál debe ser el número total de árboles que debe tener el huerto para que la producción sea máxima?

$$\text{Número total de árboles} = 30 + x = 30 + 5 = \mathbf{35 \text{ árboles}}$$

¿Cuál será esa producción?

La producción general o la cantidad de frutos totales es:

$$y = (30 + x)(200 - 5x)$$

$$y = [30 + 5][200 - 5(5)]$$

$$y = (35)(200 - 25)$$

$$y = (35)(175)$$

$$y = \mathbf{6125 \text{ mangos}}$$

OTRO MÉTODO

Recuerda que para obtener la derivada de la función $y = (30 + x)(200 - 5x)$ también pudimos haber usado la regla del producto, obteniendo el mismo resultado, tal como se muestra a continuación:

$$y = \underbrace{(30 + x)}_u \underbrace{(200 - 5x)}_v$$

Si identificamos cada parte de la función descrita la primer parte es "u" y la segunda parte es "v".

$$u = (30 + x)$$

$$v = (200 - 5x)$$

Una vez identificadas cada una de las partes de la función a derivar por la regla del producto, procedemos a derivar cada parte (Nota si se es factible puede derivar por separado):

$$u = (30 + x)$$

$$v = (200 - 5x)$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(30) + \frac{d}{dx}(x)$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}(200) - \frac{d}{dx}(5x)$$

Al resolver esta primer parte de la derivada, obtenemos:

$$\frac{du}{dx} = 1$$

Al resolver esta segunda parte de la derivada, obtenemos:

$$\frac{dv}{dx} = -5 \frac{d}{dx}(x)$$

$$\frac{dv}{dx} = -5(1)$$

$$\frac{dv}{dx} = -5$$

Ahora que tenemos las derivadas de ambas partes de la función, aplicamos la regla de derivación del producto:

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{d}{dx}(v) + v \frac{d}{dx}u$$

O en su caso aplicar la siguiente que es lo mismo:

$$\frac{d}{dx}(u \cdot v) = u(v') + v(u')$$

Al sustituir tenemos lo siguiente:

$$\frac{d}{dx}(uv) = (30 + x)(-5) + (200 - 5x)(1)$$

Multiplicar cada parte correspondiente:

$$\frac{dy}{dx} = y' = -150 - 5x + 200 - 5x$$

Simplificar los términos que son semejantes y obtenemos el resultado:

$$\frac{dy}{dx} = y' = -10x + 50$$

CATEGORIAS

PM3-SA2 ACT03

ACTIVIDAD DE REFORZAMIENTO

C1 Procedural

C2 Procesos de intuición y razonamiento

C4 Interacción y lenguaje matemático



Instrucciones: Haciendo uso del criterio de la 1ra y 2da derivada, dé solución al planteamiento de cada problemática, además de especificar los intervalos donde la función crece y/o decrece, donde es cóncava hacia arriba y/o cóncava hacia abajo, puntos de inflexión, y los puntos máximos y/o mínimos.

1.- El abuelito de Joaquín tiene 80 Ovejas, y decidió trasladarlos a una pequeña parcela con cultivo de pastura. El hato crece rápidamente en individuos, lo que provoca que la fuente de alimentos disminuya drásticamente, puesto que, debido a las inclemencias del tiempo (Seca), la pastura no crece, provocando que la población de borregos también disminuya. Con este análisis, la población de Ovejas N está en función del tiempo t (en años), tal que $N(t) = -t^3 + 3t^2 + 30t + 80$.

- Analice la función $N(t)$ para construir su gráfica, determinando los intervalos donde es creciente, decreciente, su concavidad, puntos de inflexión.
- ¿A los cuantos años deja de crecer la población de Ovejas, a causa de la falta de comida?
- ¿Cuál es el tamaño máximo de la población?
- Si el abuelito de Joaquín no hace nada por atender el hato, a los cuantos años dejará de existir la población de Ovejas.



Imagen tomada de: https://img.freepik.com/vector-premium/grupo-ovejas-jugando-campo_43633-6087.jpg
en mayo 2024

2.- Con el objetivo de aumentar las ganancias de su negocio, Marcela desea embazar la miel de abeja que produce, en envases cilíndricos (sin tapa), con capacidad de medio litro cada uno. Ella misma va elaborar los envases, pero solicita el apoyo de los alumnos del 3er. Semestre del COBATAB, quienes lleva la UAC de pensamiento matemático 3. NOTA: Expresé la altura del cilindro en términos del radio de la base.

- ¿Cuál es la función que representa la situación?
- Indica los intervalos en los que la función es creciente, decreciente, concavidad y puntos de inflexión. Muestre la gráfica de la función.
- ¿Cuáles son las dimensiones (en cm) del envase, de tal manera que se ocupe la menor cantidad de material posible?
- ¿Cuánto material (en cm^2) se usará como mínimo, para realizar el envase?



Imagen tomada de:

<https://depositphotos.com/photo/white-blank-tin-can-mockup-cylindrical-packaging-metal-lid-tea-311183628.html> en mayo 2024

SESIÓN 19

Progresión 11

Las derivadas tienen aplicaciones muy variadas y útiles en diferentes campos y en una gran cantidad de áreas científicas, ya que es una herramienta para aplicar procesos algebraicos fundamentales en los estudios de Física, Química, Biología y Medicina, o en ciencias sociales como la Economía, Finanzas y la Sociología, además de la Ingeniería y la computación. (Chable Olan, Roman Antonio, 2024)

Veamos a continuación algunas de las aplicaciones:

Física.	Las derivadas se aplican en aquellos casos donde es necesario medir la rapidez con la que se produce el cambio de una magnitud o situación específica de un móvil en movimiento generando diferentes comportamientos (lineal, parabólico, etc.). También al ser derivada con respecto al tiempo, de la posición de un objeto es que se estudia la velocidad (como la velocidad instantánea; el concepto de la velocidad promedio, aceleración y sobre aceleración).
Química.	Las derivadas han sido fundamentales para poder expresar y calcular mediante ellas razones de cambio, que después se pueden demostrar mediante la práctica en un laboratorio o en campo. También nos ayudan a demostrar la velocidad de una reacción química, la variación de la concentración de alguna sustancia y también en el estudio del intercambio de calor, momento y masa.
Biología y medicina.	Las derivadas se emplean en el estudio de fenómenos biológicos como el crecimiento celular, la propagación de enfermedades y la dinámica de poblaciones. Además, son útiles para analizar funciones fisiológicas y como el ritmo cardíaco.
Economía y finanzas.	Las derivadas se utilizan muy frecuentemente para analizar y predecir cambios en variables económicas como la oferta, la demanda, los precios y los ingresos. También se aplican en la valoración de opciones financieras y derivados, ayudando a los inversionistas y analistas para poder evaluar los riesgos y las oportunidades en los mercados financieros, empresas y comercios.
Ingeniería y ciencias de la computación.	Las derivadas son esenciales en el diseño y análisis de sistemas y procesos en la ingeniería y las ciencias de la computación. Se utilizan para optimizar funciones y modelos, calcular tasas de cambio en sistemas dinámicos, analizar señales y realizar operaciones matemáticas avanzadas, como lo es el estudio de los métodos numéricos, el álgebra lineal, el cálculo vectorial y las ecuaciones diferenciales.

Tabla comparativa elaborada por Chablé Olán, Román Antonio, Plantel 30 (junio, 2024).

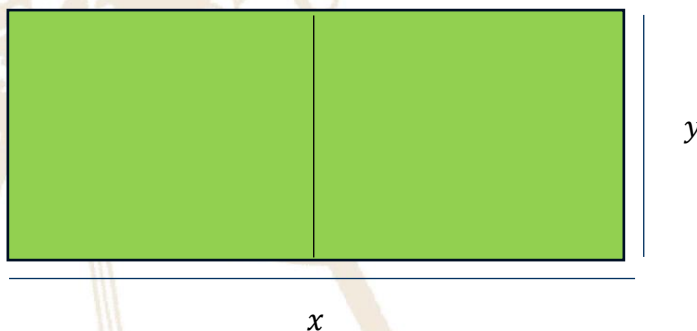
Para ello veamos algunos ejemplos aplicados a algunas de las ciencias anteriormente enunciadas.

El director general del Colegio de Bachilleres de Tabasco dio las instrucciones a todos los planteles del estado de designar un terreno con una superficie de 200 m^2 para el proyecto del huerto escolar, la condición es que el terreno debe ser de forma rectangular, para así poder cercarlo y llevar a cabo el huerto escolar. ¿Cuál sería las dimensiones óptimas del terreno para aprovechar al máximo su área?

Te imaginas, ¿Cómo podrías apoyar con tus conocimientos para resolver esto?

Ejemplo (Aplicado a cálculo de dimensiones): _____

Se desea cercar un terreno de $1,800 \text{ m}^2$ en dos porciones iguales, con una cerca adicional paralela a dos de los lados como se muestra en la figura. ¿Cuáles son las dimensiones del terreno de manera que el terreno utilizado tenga la longitud mínima?



Paso 1. Modelar el problema mediante una función. Se debe expresar el perímetro del terreno en función de la longitud de uno de los lados del terreno, es decir,

$$P = 2x + 3y$$

De esta ecuación se observa que se tiene dos variables, para resolver esta ecuación en función de una sola variable, debemos utilizar la información dada, es decir del área. Sabemos que el área de un rectángulo es:

$$A = xy$$

Como conocemos el área del terreno se tiene que:

$$1800 = xy$$

Despejando la variable y se tiene que:

$$y = \frac{1800}{x}$$

Sustituyendo y en el perímetro tenemos que:

$$P = 2x + 3\left(\frac{1800}{x}\right)$$

Ahora bien, como esta expresión está en término de la variable x , podemos reescribir la función de la siguiente manera:

$$P(x) = 2x + 3\left(\frac{1800}{x}\right)$$

Esta es la función que deseamos minimizar.

Paso 2. Derivar la función $P(x)$ aplicando las técnicas de derivación.

$$P'(x) = \frac{d}{dx}\left[2x + 3\left(\frac{1800}{x}\right)\right]$$

$$P'(x) = 2 - \frac{5400}{x^2}$$

Paso 3. Se busca los puntos críticos, igualando la derivada a cero, $P'(x) = 0$

$$2 - \frac{5400}{x^2} = 0$$

Despejando la variable x se obtiene los puntos críticos.

$$2 = \frac{5400}{x^2}$$

$$2x^2 = 5400$$

$$x^2 = \frac{5400}{2}$$

$$x^2 = 2700$$

$$x = \sqrt{2700} = \sqrt{(900)(3)}$$

$$x = \pm 30\sqrt{3}$$

$x_1 = 30\sqrt{3}$ $x_2 = -30\sqrt{3}$ estos son los puntos críticos encontrados.

De los cuales se utilizará el positivo ya que no existe longitudes negativas.

Paso 4. Aplicando el criterio de la segunda derivada se tiene que:

$P''(x) = \frac{10800}{x^3}$, se evalúa el punto crítico $x = 30\sqrt{3}$ en la segunda derivada.

$$P''(30\sqrt{3}) = \frac{10800}{(30\sqrt{3})^3} = 0.076$$

Paso 5. Análisis y conclusión.

Como el resultado fue mayor que 0 entonces comprobamos que se trata de un mínimo.

Por lo tanto, las dimensiones del terreno serían:

$$x = 30\sqrt{3} = 51.96 \text{ m} \qquad y = \frac{1800}{30\sqrt{3}} = 34.64 \text{ m}$$

$$P = 2(51.96) + 3(34.64) = 103.92 \text{ m} + 103.92 = 207.94 \text{ m}$$

Ejemplo (Aplicado a Física): _____

Se tiene una partícula en el espacio que describe la siguiente expresión algebraica:

$$s(t) = t^3 - \frac{9}{2}t^2 - 7t$$

Si la condición es que no hay tiempo negativo; entonces $t \geq 0$, Da la función de posición de esta partícula:

- ¿Cuándo la partícula alcanza una velocidad de 5 m/s?
- ¿Cuándo es cero la aceleración?

Para el inciso a) debemos de derivar la función que tenemos anteriormente:

$$v'(t) = s'(t)$$

$$y' = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(t^3) - \frac{d}{dt}\left(\frac{9}{2}t^2\right) - \frac{d}{dt}(7t)$$

$$y' = \frac{dy}{dt} = 3t^2 - 9t - 7$$

Como derivamos, con ello encontramos la función velocidad y se nos pide que busquemos el tiempo que alcanza la partícula a los 5 m/s y sustituimos:

$$5 = 3t^2 - 9t - 7$$

Resolvemos la ecuación cuadrática:

$$0 = 3t^2 - 9t - 7 - 5$$

$$0 = 3t^2 - 9t - 12$$

Para tener una expresión más sencilla podemos observar que toda la ecuación es divisible entre 3, entonces procedemos a dividir entre 3 a toda la ecuación.

$$0 = \frac{3t^2 - 9t - 12}{3}$$

$$0 = t^2 - 3t - 4$$

Resolvemos la expresión algebraica por factores de términos semejantes:

$$0 = (t - 4)(t + 1)$$

Entonces decimos que:

$$t_1 = 4 \text{ seg}$$

$$t_2 = -1 \text{ seg}$$

Desde el inicio del problema nos establecieron que no puede haber tiempo negativo, por lo tanto, la respuesta correcta es: **4 segundos alcanza los 5 m/s.**

Para el inciso b) vamos a calcular la derivada de la velocidad es decir la segunda derivada de la función principal.

$$y'' = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}(3t^2) - \frac{d}{dt}(9t) - \frac{d}{dt}(7)$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dt^2} = 3 \frac{d}{dt}(t^2) - 9 \frac{d}{dt}(t) - \frac{d}{dt}(7)$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dt^2} = 6t - 9$$

Ahora este resultado nos demuestra la aceleración de dicha partícula y la condición es que debe de valor cero.

$$0 = 6t - 9$$

$$t = \frac{9}{6} = \text{simplificando } t = \frac{3}{2} \text{ segundos}$$

A los 1.5 segundos la aceleración era 0.

Problemas de optimización

Los problemas de optimización son aquellas situaciones en donde se solicita encontrar la mejor opción, en la búsqueda de minimizar o maximizar el valor de una variable; por ejemplo: donde se requiere encontrar el menor tiempo de producción de un artículo, la máxima altura que alcanza un proyectil, la ganancia máxima o el costo mínimo de producción de un aparato eléctrico, el volumen máximo de un recipiente o el área mínima, entre otros tantos problemas que se pueden mencionar.

Para resolver un problema de optimización, utilizaremos los siguientes pasos:

1. Plantear la función f que se desea optimizarse (maximizar o minimizar).
2. Calcular la derivada de la función f .
3. Buscar los puntos críticos de f igualando a cero la derivada $f' = 0$.
4. Analizar si la función f es creciente o decreciente en los puntos críticos encontrados, utilizando el criterio de la segunda derivada.
5. Dar la conclusión al problema planteado.

Ejemplo:

Se ha observado que en unas de salidas de la ciudad de Villahermosa la velocidad de los automóviles entre las 2 pm y 6 pm viene dado por: $v(t) = t^3 - 15t^2 + 72t - 8$; para $t = 2,6$.

- A) ¿A qué hora circulas los automóviles con mayor velocidad?
- B) ¿A qué hora circulan los automóviles con menor velocidad?

En ambos casos justifica tu respuesta.

Solución. Para poder determinar las horas en que los automóviles circulan a mayor y menor velocidad, es necesario calcular el máximo y mínimo de la función $v(t) = t^3 - 15t^2 + 72t - 8$.

Paso 1. Plantear la función $v(t)$ que se desea optimizarse (maximizar o minimizar).

$$v(t) = t^3 - 15t^2 + 72t - 8$$

Paso 2. Calcular la derivada $v(t)$

$$v'(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(t^3) - \frac{d}{dt}(15t^2) + \frac{d}{dt}(72t) - \frac{d}{dt}(8)$$

$$v'(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(t^3) - 15 \frac{d}{dt}(t^2) + 72 \frac{d}{dt}(t) - \frac{d}{dt}(8)$$

$$v'(t) = \frac{dy}{dt} = 3t^2 - 30t + 72$$

Paso 3. Buscar los puntos críticos de $v(t)$ igualando a cero la derivada $v' = 0$.

$3t^2 - 30t + 72 = 0$. Dividiendo entre 3 esta expresión, tenemos que:

$t^2 - 10t + 24 = 0$. Factorizando tenemos: $(t - 6)(t - 4) = 0$. Los puntos críticos seria:

$$t = 6, \quad t = 4$$

Paso 4. Analizar si la función $v(t)$ es creciente o decreciente en los puntos críticos encontrados, utilizando el criterio de la segunda derivada.

Calculado la segunda derivada: $v''(t) = 6t - 30$

Evaluated los puntos críticos en la segunda derivada.

$v''(6) = 6(6) - 30 = 36 - 30 = 6$; como es mayor que cero entonces es un punto mínimo.

$v''(4) = 6(4) - 30 = 24 - 30 = -4$; como es menor que cero, entonces es un punto máximo.

Paso 5. Dar la conclusión al problema planteado.

A las 4 pm los vehículos circulan con mayor rapidez; mientras que a las 6 pm los vehículos circulan con menor velocidad.



TABASCO

"Educación que genera cambio"



COBATAB
COLEGIO DE BACHILLERES
DE TABASCO

SESIÓN 20

CATEGORIAS

PM3-SA2 ACT04

ACTIVIDAD DE REFORZAMIENTO

C2 Procesos de intuición y razonamiento

C3 Solución de problemas y modelación

C4 Interacción y lenguaje matemático



Instrucciones: Resuelve los siguientes ejercicios

1. Ricardo quiere regalar galletas en cajas sin tapa, para la realización de esas cajas desea utilizar unas hojas de papel opalina que le sobraron a las cuales les recortará cuadrados en las esquinas. Las medidas de cada hoja son: 24.5 cm x 32cm. Ricardo debe encontrar la medida óptima de los cuadrados que va a recortar con la finalidad de obtener una caja cuyo volumen sea máximo.



TABASCO



COBATAB
COLEGIO DE BACHILLERES
DE TABASCO

"Educación que genera cambio"

2. Se ha observado que en unas de salidas de la ciudad de Villahermosa la velocidad de los automóviles entre las 2 pm y 6 pm viene dado por: $v(t) = t^3 - 15t^2 + 72t - 8$; para $t = 2.6$
- ¿A qué hora circulas los automóviles con mayor velocidad?
 - ¿A qué hora circulan los automóviles con menor velocidad?

SESIÓN 21

Progresión 12

Funciones exponenciales y logarítmicas

¿Cómo se puede estimar la población mundial que habrá en los próximos diez años?

¿De qué forma un banco calcula el interés compuesto para un dinero invertido?

¿Cómo el Servicio Sismológico Nacional mide la magnitud de un sismo?

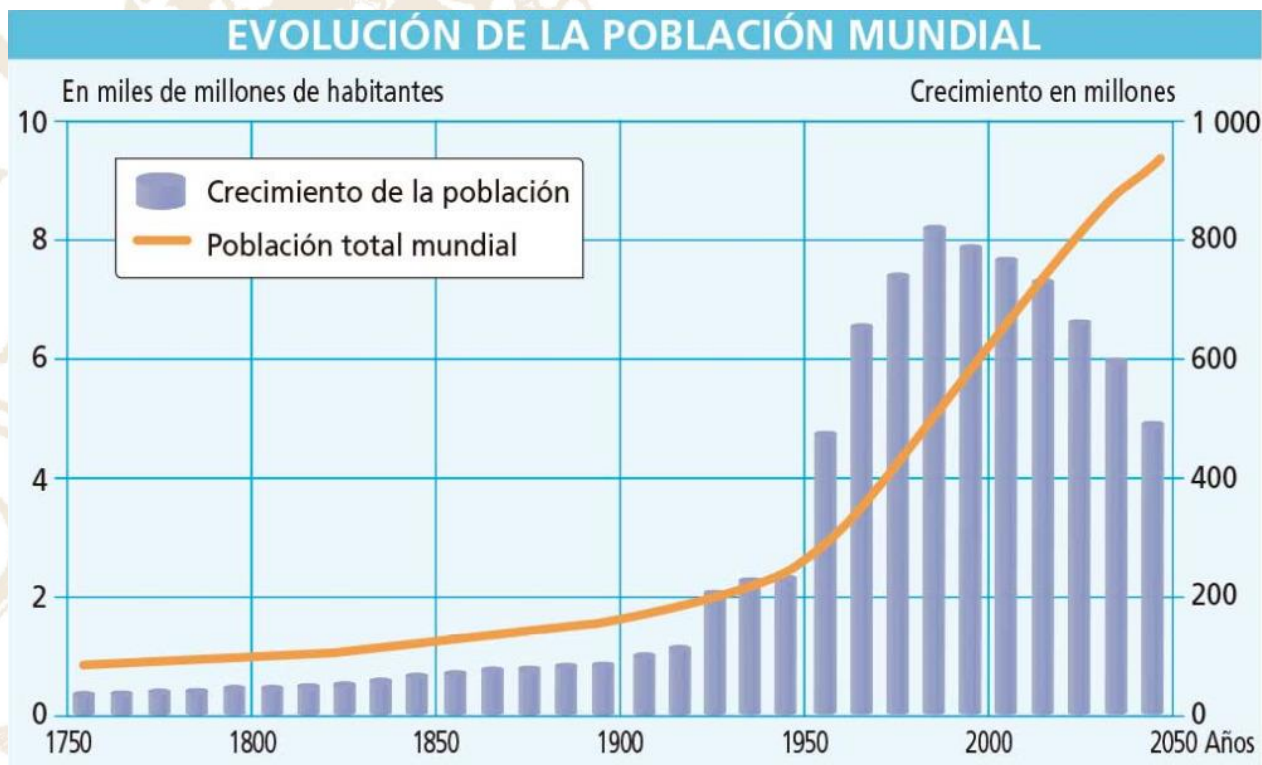


Figura recuperada de <https://territoriosociales.blogspot.com/2019/11/la-poblacion-mundial-evolucion-y.html> en mayo, 2024.

Para responder preguntas como las anteriores, se utilizan las funciones exponenciales y las funciones logarítmicas, pero primero los estudiantes pondrán a prueba sus conocimientos sobre la potenciación.

Función exponencial

La **función exponencial de base a** es aquella donde el argumento x se presenta en forma de exponente y cuya expresión matemática es de la forma

$$f(x) = a^x$$

donde

a es un número positivo, diferente de la unidad ($a > 0$ y $a \neq 1$).

x es la variable independiente.

Función exponencial natural

Cuando la función exponencial

$$f(x) = a^x$$

tiene como base el número irracional $e = 2.71828...$, entonces

$$f(x) = e^x$$

recibe el nombre de *función exponencial natural*.

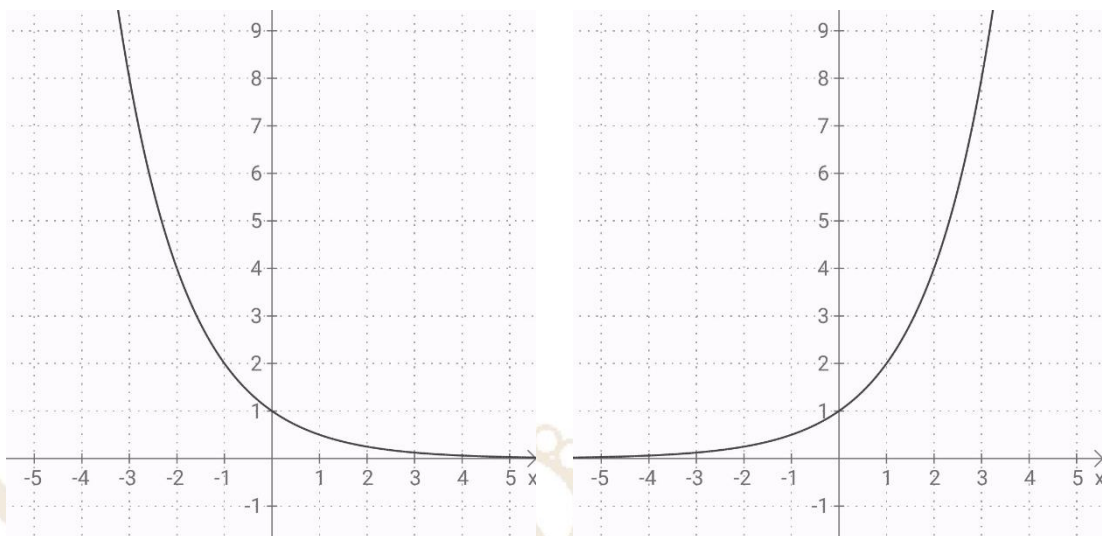
Propiedades de la función exponencial

1. Su dominio es el conjunto de los números reales, $\mathbf{R}$.
2. Su rango es el conjunto de los números reales positivos, $\mathbf{R}^+$.
3. Es una función continua.
4. Es una función inyectiva.
5. Su gráfica en el plano cartesiano se ubica en el primer y segundo cuadrante, además que nunca toca el eje de las x .
6. Su gráfica en el plano cartesiano intercepta el eje de las y en el punto $(0, 1)$.
7. Si $0 < a < 1$, la función es decreciente.
8. Si $a > 1$, la función es creciente.

Gráfica de la función exponencial

Para $0 < a < 1$

Para $a > 1$



Aplicaciones de la función exponencial

Las funciones exponenciales se usan para describir el comportamiento de fenómenos o situaciones en áreas como la biología o las finanzas.

En biología, las funciones exponenciales se utilizan para estudiar el crecimiento o decrecimiento exponencial de las poblaciones y suelen expresarse como

$$P(t) = P_0 e^{kt}$$

donde $P(t)$ es la población al tiempo t , P_0 es la población inicial, k es la constante de crecimiento ($k > 0$) o decrecimiento ($k < 0$) y t es la variable independiente tiempo.

En finanzas, las funciones exponenciales se utilizan para calcular el interés compuesto.

Por ejemplo, se invierte un capital inicial de dinero C a una tasa anual de interés r , expresada en decimales. Si el interés se capitaliza p veces por año, entonces al final de t años, el monto compuesto o valor futuro es

$$M(t) = C \left(1 + \frac{r}{p} \right)^{pt}$$

donde

Interés compuesto = monto compuesto – capital inicial.

Función logarítmica

La *función logarítmica de base a* es la inversa de la función exponencial de base a y su expresión matemática es de la forma

$$f(x) = \log_a(x)$$

donde

a es un número positivo, diferente de la unidad ($a > 0$ y $a \neq 1$).

x es el argumento o la variable independiente.

En otras palabras, $y = \log_a(x)$ *si, y solo si*, $x = a^y$

Función logarítmica natural o función logaritmo natural

Cuando la función logarítmica

$$f(x) = \log_a(x)$$

tiene como base el número irracional $e = 2.71828...$, entonces

$$f(x) = \log_e(x) = \ln(x)$$

recibe el nombre de *función logarítmica natural o función logaritmo natural*.

Entonces, $y = \ln(x)$ *si, y solo si*, $x = e^y$

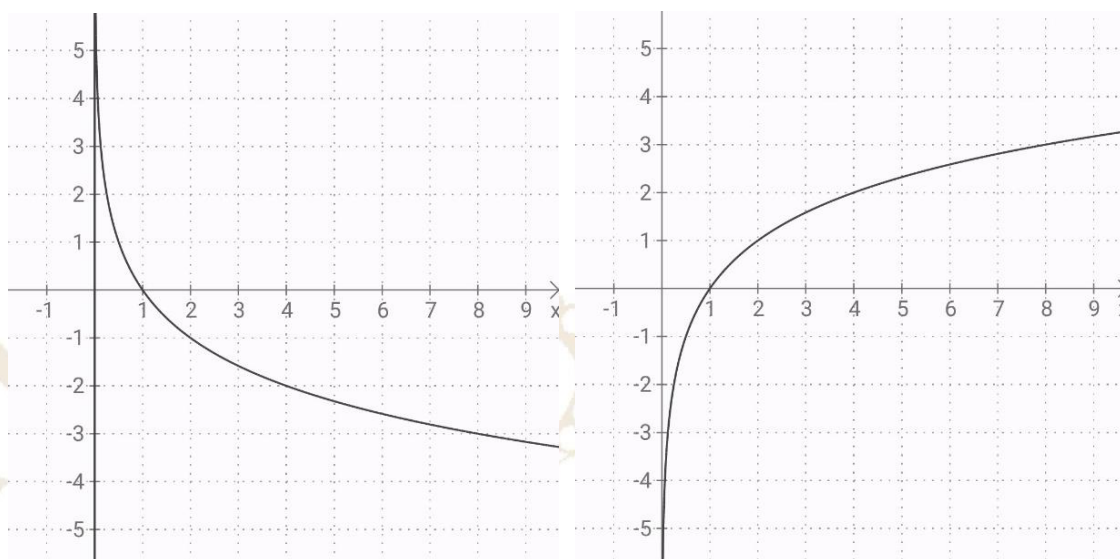
Propiedades de la función logarítmica

1. Su dominio es el conjunto de los números reales positivos, $\mathbb{R}^+$.
2. Su rango es el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$.
3. Es una función continua.
4. Es una función inyectiva.
5. Su gráfica en el plano cartesiano se ubica en el primer y cuarto cuadrante, además que nunca toca el eje de las Y .
6. Su gráfica en el plano cartesiano intercepta el eje de las X en el punto $(1, 0)$.
7. Si $0 < a < 1$, la función es decreciente.
8. Si $a > 1$, la función es creciente.

Gráfica de la función logarítmica

Para $0 < a < 1$

Para $a > 1$



Aplicaciones de la función logarítmica

En física, las funciones logarítmicas se utilizan para describir fenómenos como la intensidad del sonido (escala de decibelios).

En informática, las funciones logarítmicas ayudan en el análisis de algoritmos y diseño de algoritmos eficientes. Muchos algoritmos, como la búsqueda binaria y el algoritmo de clasificación rápida, tienen una complejidad de tiempo logarítmica, lo que los hace muy eficientes para grandes conjuntos de datos.

En economía, el crecimiento económico puede ser analizado con funciones logarítmicas y esto permite analizar las tendencias del mercado. Por ejemplo, se utilizan para modelar el crecimiento del PIB y la propagación de la inflación.

En química, las funciones logarítmicas pueden describir el comportamiento de las reacciones químicas. Por ejemplo, se usan para describir la velocidad de las reacciones químicas, que se suele medir según el cambio en la concentración de un reactivo o producto en el tiempo.

Propiedades de los exponentes

Propiedad	Ejemplo
1. $a^m a^n = a^{m+n}$	$2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 = 128$ $x^4 \cdot x^5 = x^{4+5} = x^9$
2. $(a^m)^n = a^{mn}$	$(2^3)^4 = 2^{(3)(4)} = 2^{12} = 4096$ $(x^4)^5 = x^{(4)(5)} = x^{20}$
3. $(ab)^n = a^n b^n$	$(2 \cdot 3)^4 = 2^4 3^4 = (16)(81) = 1296$ $(x \cdot y)^5 = x^5 y^5$
4. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{2^8}{2^3} = 2^{8-3} = 2^5 = 32$ $\frac{x^{10}}{x^4} = x^{10-4} = x^6$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$ $\left(\frac{x}{y}\right)^3 = \frac{x^3}{y^3}$
6. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$ $x^{-3} = \frac{1}{x^3}$

Propiedades de los logaritmos

Propiedad	Ejemplo
1. $\log_a 1 = 0$	$\log_4 1 = 0$
2. $\log_a a = 1$	$\log_5 5 = 1$
3. $\log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v)$	$\log_2(2 \cdot 4) = \log_2(2) + \log_2(4) = 1 + 2 = 3$
4. $\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a(u) - \log_a(v)$	$\log_3\left(\frac{81}{9}\right) = \log_3(81) - \log_3(9) = 4 - 2 = 2$
5. $\log_a(u^n) = n \log_a(u)$	$\log_4(16^3) = 3 \log_4(16) = (3)(2) = 6$
6. $\log_a(\sqrt[n]{u}) = \frac{1}{n} \log_a(u)$	$\log_2(\sqrt[2]{8}) = \frac{1}{2} \log_2(8) = \left(\frac{1}{2}\right)(3) = \frac{3}{2}$

CATEGORIAS
PM3-SA2 T02
TAREA 2: Tabla comparativa

C2 Procesos de intuición y razonamiento
C3 Solución de problemas y modelación



Instrucciones: En binas realicen la lectura de "funciones exponenciales y logarítmicas", analicen la información y completen la siguiente tabla comparativa sobre funciones exponenciales y logarítmicas.

Tabla comparativa sobre las funciones exponenciales y logarítmicas

Concepto	Función exponencial	Función logarítmica
Definición		
Expresión algebraica		
Característica o propiedades		
Modelo grafico		
Aplicación en un contexto real		

PM3-SA2-LC02 Tipo de instrumento para evaluar TAREA 02: "Tabla comparativa"

Unidad de aprendizaje	Pensamiento Matemático 3	Grupo		Fecha:		
Progresión	Examina la gráfica de funciones logarítmicas con diferentes bases y las gráficas de las funciones exponenciales para describirlas y realizar afirmaciones sobre el significado de que la función exponencial y logarítmica de base "a" sean funciones inversas entre sí.					
Meta	M3 Compara hechos, opiniones o afirmaciones para organizarlos en formas lógicas útiles en la solución de problemas y explicación de situaciones y fenómenos M2 Construye un modelo matemático, identificando las variables de interés, con la finalidad de explicar una situación o fenómeno y/o resolver un problema tanto teórico como de su entorno					
Categorías	C2 Procesos de intuición y razonamiento. C3 Solución de problemas y modelación.	Subcategorías	C2S1 Capacidad para observar y conjeturar C2S2 Pensamiento intuitivo C2S3 Pensamiento formal C3S2 Pensamiento intuitivo y construcción de modelos			
Nombre de los integrantes						
TAREA 02:						
Aprendizajes Trayectoria				Contenidos Específico		
- Adopta procesos de razonamiento matemático tanto intuitivos como formales tales como observar, intuir, conjeturar y argumentar, para relacionar información y obtener conclusiones de problemas (matemáticos, de las ciencias naturales, experimentales y tecnología, sociales, humanidades, y de la vida cotidiana) - Modela y propone soluciones a problemas tanto teóricos como de su entorno, empleando lenguaje y técnicas matemáticas.				- Función exponencial - Gráfica de funciones exponenciales - Propiedades de la función exponencial - Función logarítmica - Gráfica de funciones logarítmicas - Propiedades de la función logarítmica - Relación entre la función exponencial y la función logarítmica		
CRITERIOS				%	CUMPLE	Puntaje
					SI	NO
1.	Entrega su producto terminado en el tiempo establecido por el facilitador.			10		
2.	Distingue las diferencias entre función exponencial y función logarítmica.			20		
3.	Reconoce las propiedades de las funciones exponenciales y logarítmicas, así como sus gráficas.			30		
4.	Identifica situaciones de la vida real en las que están presente las funciones exponenciales y logarítmicas.			20		
5.	Se relaciona colaborativamente, mostrando disposición al trabajo metódico y organizado.			20		
Calificación						
Aspectos para mejorar:						
						Firma

SESIÓN 22

Ejemplos de aplicación:

Proliferación de insectos, muchos de estos se convierten en plagas gracias a su crecimiento exponencial. Uno de los insectos que son comunes encontrar en los huertos, por la abundante humedad y sombra, son las cochinillas, y se ha observado que se duplican cada 4 meses. Supongamos que se contabiliza una población inicial de 100 cochinillas en el huerto de tu plantel, calcula cuantos meses pasaran para llegar a las 800 cochinillas si el modelo matemático que representa esta propagación de insectos es $P(t) = 100 * 2^{t/4}$.

Solución:

$$800 = 100 * 2^{t/4}$$

$$\frac{800}{100} = 2^{t/4}$$

$$8 = 2^{t/4}$$

$$2^3 = 2^{t/4}$$

$$3 = t/4$$

$$3 * 4 = t$$

$$12 \text{ meses} = t$$

Es común que, al hacer un huerto escolar, observemos con el paso de los días, que algunas de las semillas sembradas no crezcan, o que las plantas se mueran, aunque se les del cuidado apropiado. Uno de los factores que afectan el crecimiento y desarrollo de las plantas es el pH (potencial de Hidrogeno) de la tierra, según los expertos, en los suelos con un pH inferior a 6 se observa una ralentización de la actividad biológica, derivada del efecto negativo que una acidez excesiva causa sobre la fauna y flora del suelo. Con ayuda del maestro de taller de ciencias los alumnos del COBATAB midieron el pH de la tierra de sus huertos escolares, dando los siguientes resultados:

Huerto plantel 19: pH=3.0

Huerto plantel 21: pH=6.5

Calcula la concentración de Hidrógeno en la tierra de los huertos de cada plantel, utilizando la siguiente fórmula:

$$pH = -\log[H^+]$$

Solución:

Huerto plantel 19:

$$3.0 = -\log[H^+]$$

$$10^{-3.0} = 10^{\log[H^+]}$$

$$10^{-3.0} = [H^+]$$

$$[H^+] = 0.001 M$$

Huerto plantel 21:

$$6.5 = -\log[H^+]$$

$$10^{-6.5} = 10^{\log[H^+]}$$

$$10^{-6.5} = [H^+]$$

$$[H^+] = 3.19 \times 10^{-7} M$$

Relación entre la función exponencial y la función logarítmica

Un logaritmo de un número es el **exponente** al cual tiene que elevarse la **base** para llegar a **dicho número**

La función logarítmica es la función inversa de la exponencial. La cual se puede expresar de la siguiente manera:

$$x = a^y$$

$$y = \log_a x$$

Por ejemplo:

$$25 = 5^2$$

$$2 = \log_5 25$$

$$512 = 8^3$$

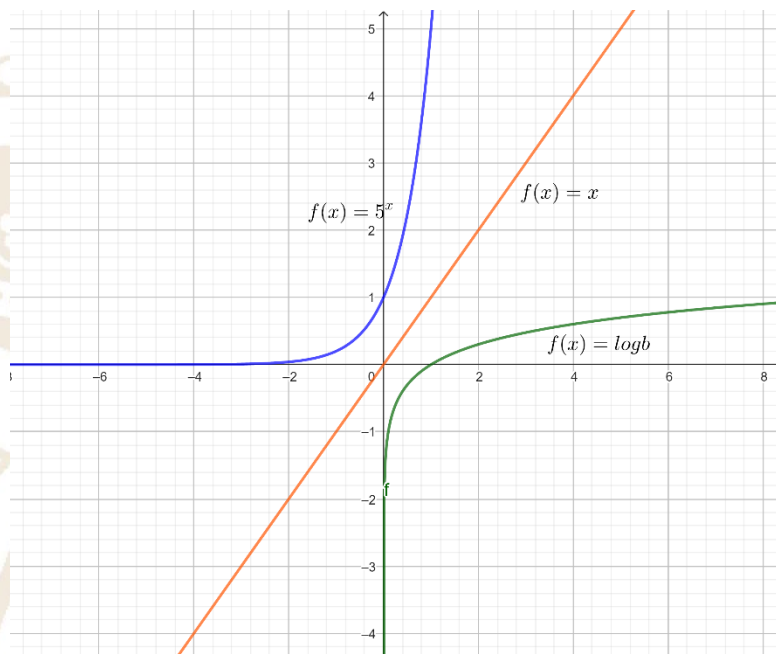
$$3 = \log_8 512$$

$$16 = 2^4$$

$$4 = \log_2 16$$

$$\left(\frac{1}{9}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \quad 2 = \log_{\left(\frac{1}{3}\right)}\left(\frac{1}{9}\right)$$

En la siguiente imagen podemos observar las graficas de una función logarítmica y una función exponencial, la cual podemos mencionar que son inversas entre sí, por lo que son simétricas con respecto a la función identidad ($f(x)=x$).



CATEGORIAS
PM3-SA2 ACT05
ACTIVIDAD DE REFORZAMIENTO

C2 Procesos de intuición y razonamiento
C3 Solución de problemas y modelación



Instrucciones: Resuelve los siguientes ejercicios

Problemario sobre las funciones exponenciales y logarítmicas

Resuelve los ejercicios de cada una de las siguientes secciones.

Sección 1.

Simplifica las siguientes expresiones matemáticas utilizando las propiedades de los exponentes.

1. $x^5 \cdot x^6 =$ _____

2. $(x^6)^7 =$ _____

3. $(x \cdot y)^8 =$ _____

4. $\frac{x^9}{x^5} =$ _____

5. $\left(\frac{x}{y}\right)^5 =$ _____

Sección 2. Realiza las siguientes operaciones haciendo uso de las propiedades de los logaritmos

1. $\log_2(4 \cdot 8) =$ _____

2. $\log_3(27 \cdot 81) =$ _____

3. $\log_2\left(\frac{32}{4}\right) =$ _____

4. $\log_3\left(\frac{243}{3}\right) =$ _____

5. $\log_2(2^5) =$ _____

Una población de lombrices de tierra crece de forma exponencial en tu huerto escolar, el modelo que describe el crecimiento en cierto periodo de tiempo es el siguiente: $P(t) = 20 \cdot 5^{24/3}$, se sabe que inicialmente eran 20 lombrices pero, se quintuplicaban cada 3 meses. }

Averigua cuantas lombrices de tierra habra en 2 años.

SESIÓN 23

Progresión 13

Uso de funciones senoidales y cosenoidales en la modelación y graficación (movimiento ondulatorio y oscilatorio).

¿Te gusta la música? ¿Sabías que las funciones sinusoidales y cosenoidales están presentes al tocar un instrumento musical como la guitarra? Cuando rasgueamos las cuerdas se producen vibraciones (movimiento ondulatorio) en ella que ocasionan el sonido.

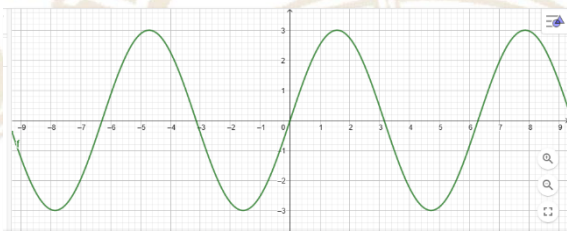
La trigonometría es una rama de las matemáticas que establece la relación de las razones seno, coseno, tangente, cotangente, secante, cosecante y trabaja en conjunto con la geometría pues se aplicada a triángulos rectángulos.

Las funciones senoidales y cosenoidales son dos tipos fundamentales de funciones trigonométricas que se basan a partir del uso del círculo unitario, estas funciones se extienden para representar el comportamiento periódico en el tiempo o en el espacio. En matemáticas una función senoidal (sinusoidal) o cosenoidal (cosenoide) es la curva que representa gráficamente a dicha funciones, la cual describe una oscilación u ondulación de manera repetitiva, tales como: el movimiento oscilatorio, las ondas sonoras, las señales eléctricas, entre otros.

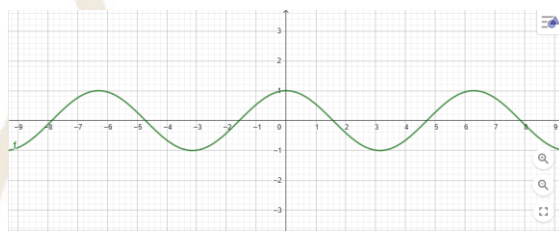
Para reforzar



YouTube:
Aplicaciones de la
trigonometría en la vida
cotidiana. Para que sirva la
trigonometría??



Gráfica senoide $f(x) = 3 \text{ sen } x$



Gráfica cosenoide $f(x) = \cos x$

La aplicación de las funciones sinusoidales y cosenoidales están presentes en diversas áreas de las matemáticas, la física, la ingeniería en áreas como la mecánica, acústica, óptica, entre otras. Una de las aplicaciones más comunes de estas funciones se presenta en el estudio de ondas (senoidales y cosenoidales) las cuales son fundamentales en el estudio de fenómenos ondulatorios como el sonido, la luz, las ondas electromagnéticas y las ondas en la superficie del agua.

Las funciones senoidales y cosenoidales son una herramienta poderosa, pues su capacidad para describir y analizar fenómenos repetitivos o cíclicos lo convierte en un instrumento de gran utilidad pues aporta en una amplia variedad de campos científicos y tecnológicos.

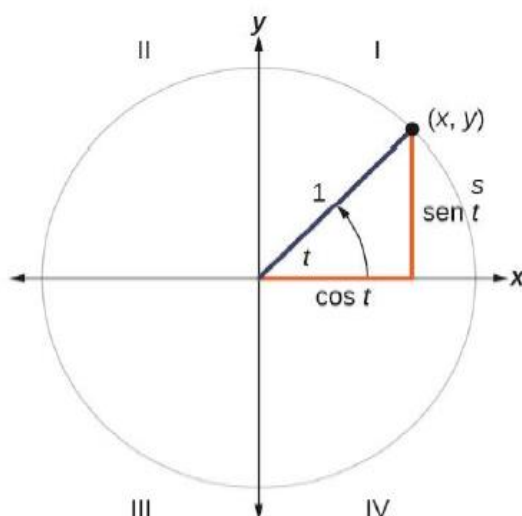
Función seno y función coseno.

Para definir nuestras funciones trigonométricas, empezamos por dibujar un círculo unitario, un círculo centrado en el origen con radio 1, como se muestra en la figura. El ángulo (en radianes) que t , interseca forma un arco de longitud s . Si utilizamos la fórmula $s = rt$, y en el entendido de que $r = 1$ vemos que, para un círculo unitario, $s = t$. Recordemos que los ejes de la x y de la y dividen el plano de coordenadas en cuatro cuartos llamados cuadrantes. Marcamos estos cuadrantes para imitar la dirección que barrería un ángulo positivo. Los cuatro cuadrantes se denominan I, II, III y IV. Para cualquier el ángulo t podemos marcar la intersección del lado terminal y el círculo unitario por sus coordenadas, (x, y) . Las coordenadas de la x como y serán las salidas de la función trigonométrica $f(t) = \cos t$ y $f(t) = \sin t$ respectivamente. Esto significa que $x = \cos t$, $y = \sin t$.

Para reforzar



YouTube
Entendiendo Seno
y Coseno



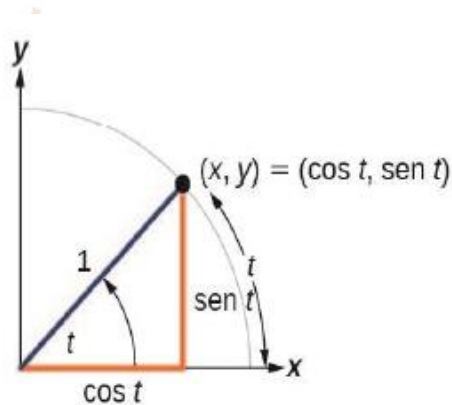
Círculo unitario donde el ángulo central es t , radianes tomada de Abramson, J. (2022, 18 mayo). 5.2 Círculo unitario: funciones seno y coseno - Precálculo 2ed | OpenStax. <https://openstax.org/books/prec%C3%A1culo-2ed/pages/5-2-c%C3%ADrculo-unitario-funciones-seno-y-coseno> en mayo, 2024.

Un círculo unitario tiene un centro en $(0,0)$ y radio 1. En un círculo unitario, la longitud del arco intersecado es igual a la medida del radián del ángulo central t .

Supongamos que (x, y) es el punto final en el círculo unitario de un arco de longitud de arco s . El punto (x, y) de este punto pueden describirse como funciones del ángulo.

Ahora, que tenemos marcado nuestro círculo unitario, podemos aprender cómo las coordenadas (x, y) se relacionan con la longitud del arco y el ángulo. La función seno relaciona un número real t con la coordenada de la y en el punto donde el ángulo correspondiente interseca el círculo unitario. Más precisamente, el seno de un ángulo t es igual al valor y del punto final en el círculo unitario de un arco de longitud t . En la siguiente figura, el seno es igual a y . Al igual que en todas las funciones, la función seno tiene una entrada y una salida. Su entrada es la medida del ángulo; su salida es la coordenada de la y en el punto correspondiente en el círculo unitario.

La función coseno de un ángulo t equivale al valor x del punto final en el círculo unitario de un arco de longitud t . como se aprecia en la siguiente figura, el coseno es igual a x .



Círculo unitario: funciones seno y coseno de Abramson, J. (2022, 18 mayo). 5.2 Círculo unitario: funciones seno y coseno - Precálculo 2ed | OpenStax. <https://openstax.org/books/prec%C3%A1culo-2ed/pages/5-2-circulo-unitario-funciones-seno-y-coseno> en mayo, 2024.

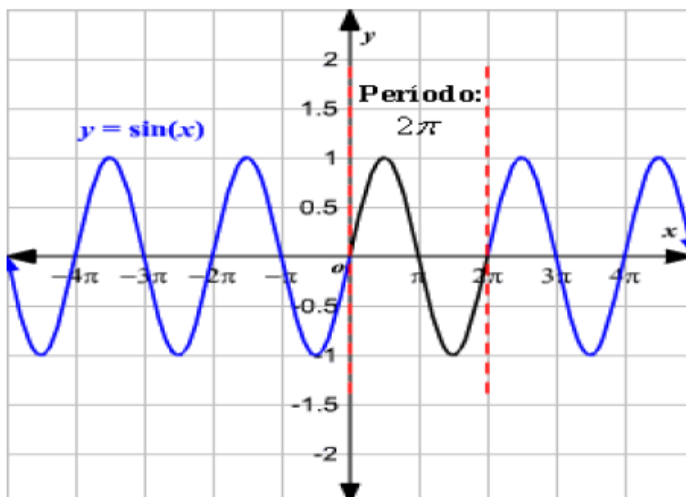
Si los valores de t es un número real y un punto (x, y) en el círculo unitario corresponde a un ángulo de t , entonces

$$\cos t = x, \text{sen } t = y$$

Gráfica de Seno

La función seno tiene esta hermosa curva de arriba hacia abajo (que se repite cada 2π radianes, o 360°).

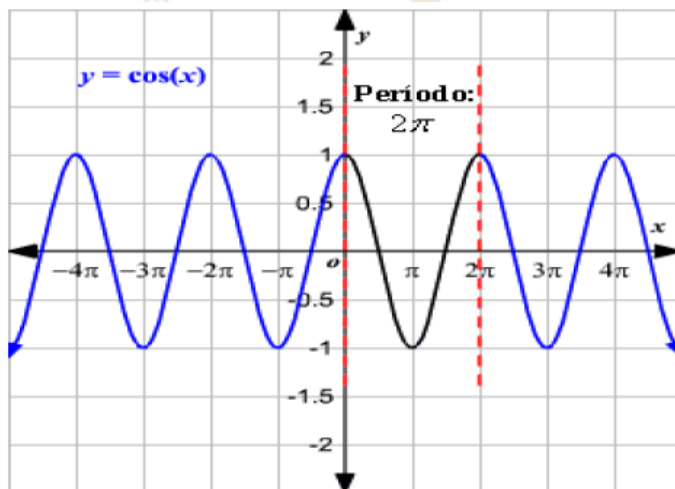
Comienza en el 0, sube hasta 1 en $\pi/2$ radianes (90°) y luego baja hasta -1 , ver siguiente figura.



Gráficas de Seno, Coseno y Tangente. (s. f.-b), tomada de <https://www.disfrutalasmaticas.com/algebra/trig-sen-cos-tan-graficas.html> en mayo, 2024

Gráfica de Coseno

El coseno es similar al seno, pero comienza en 1 y baja hasta -1 en π radianes (180°) y luego vuelve a subir



Gráficas de Seno, Coseno y Tangente (s. f.-b) tomada de <https://www.disfrutalasmaticas.com/algebra/trig-sen-cos-tan-graficas.html> en mayo, 2024

Propiedades de la función seno y función coseno.

Función seno: Se llama función seno a la aplicación f definida por,

$$f: R \rightarrow R$$
$$x \rightarrow f(x) = \text{sen}x$$

es decir, la función que asocia a cada número real x el seno del ángulo cuya medida en radianes es x .

Propiedades:

- a) El dominio de la función seno es R .
- b) El recorrido de la función seno es $[-1, 1]$, ya que el valor máximo que puede tomar el seno es 1 y el mínimo es -1 .
- c) La función seno es periódica y su periodo es 2π . En efecto, si x' es un número real podemos expresarlo como $x' = x + 2k\pi$, $k \in Z$, $x \in [0, 2\pi)$. Por tanto, para estudiar el comportamiento de la función basta hacerlo en el intervalo $[0, 2\pi)$.
- d) La función seno es positiva en el intervalo $(0, \pi)$ y negativa en $(\pi, 2\pi)$.
- e) La función seno se anula en los puntos $x = k\pi$, $k \in Z$.
- f) La función seno es continua en todo R .
- g) La función seno es estrictamente creciente en $(0, \pi/2) \cup (3\pi/2, 2\pi)$.
- h) La función seno es estrictamente decreciente en $(\pi/2, 3\pi/2)$.
- i) La función seno presenta un máximo en $x = \pi/2$ y un mínimo en $3\pi/2$.

Función coseno: Se llama función coseno a la aplicación f definida por,

$$f: R \rightarrow R$$
$$x \rightarrow f(x) = \text{cos}x$$

es decir, la función que asocia a cada número real x el coseno del ángulo cuya medida en radianes es x .

Propiedades:

- a) El dominio de la función coseno es R .
- b) El recorrido de la función coseno es $[-1, 1]$, ya que el valor máximo que puede tomar el coseno es 1 y el mínimo es -1 .

- c) La función coseno es periódica y su periodo es 2π . En efecto, si x' es un número real podemos expresarlo como $x' = x + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $x \in (0, 2\pi)$. Por tanto, para estudiar el comportamiento de la función basta hacerlo en el intervalo $(0, 2\pi)$.
- d) La función coseno es positiva en el intervalo $(0, \pi/2)$ $(3\pi/2, 2\pi)$ y negativa en $(\pi/2, 3\pi/2)$
- e) La función coseno se anula en los puntos $x = \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- f) La función coseno es continua en todo $\mathbb{R}$.
- g) La función coseno es estrictamente creciente en $[\pi, 2\pi]$.
- h) La función coseno es estrictamente decreciente en $[0, \pi]$.
- i) La función coseno es una función par y por tanto es simétrica respecto del eje y .
- j) La función coseno presenta máximos en $x = 0$ y $x = 2\pi$, y un mínimo en $x = \pi$.

Para reforzar



YouTube
Aplicación de la función
seno y coseno en el
movimiento oscilatorio y
el movimiento
ondulatorio

SESIÓN 24

CATEGORIAS

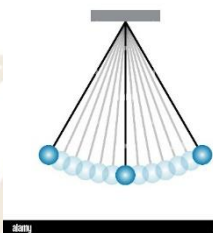
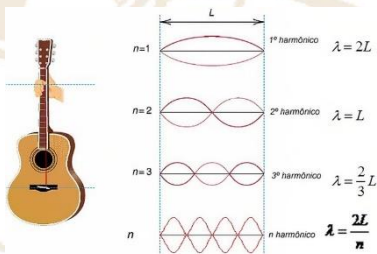
C2 Procesos de intuición y razonamiento
C3 Solución de problemas y modelación

PM3-SA2 ACT06



ACTIVIDAD DE REFORZAMIENTO

Instrucciones: En parejas, clasifica el siguiente grupo de imágenes y determina si el movimiento representa una función senoidal o cosenoidal.

Imagen	Función senoidal	Función cosenoidal
		
		
		
		

SESIÓN 25

Progresión 14

¿Sabías que en tu entorno se pueden usar las derivadas en situaciones reales llamadas ecuaciones diferenciales?

¿Has escuchado el llamado modelo presa depredador?

El Modelo Presa-Depredador de Lotka-Volterra

En esta lectura sobre el modelo presa-depredador, exploraremos cómo las interacciones entre las poblaciones de presas y depredadores pueden modelarse matemáticamente utilizando la ecuación de Lotka-Volterra, lo que nos permite comprender mejor las dinámicas de los ecosistemas y prever posibles cambios en las poblaciones en función de diferentes variables ambientales.

En el vasto mundo de la ecología, comprender las complejas interacciones entre las especies es fundamental para entender cómo los ecosistemas funcionan y cambian con el tiempo. Una de las relaciones más intrigantes es la dinámica entre las poblaciones de presas y depredadores. En esta lectura, exploraremos el modelo presa-depredador propuesto por Alfred J. Lotka y Vito Volterra a principios del siglo XX. A través de este modelo, podemos vislumbrar cómo las fluctuaciones en las poblaciones de presas y depredadores pueden afectar el equilibrio de un ecosistema.

Imagina un bosque donde viven conejos y zorros. Los conejos son las presas y los lobos son los depredadores. La cantidad de conejos y zorros cambia con el tiempo dependiendo de diferentes factores. Vamos a usar matemáticas para entender cómo estas poblaciones cambian. Este es el modelo presa-depredador de Lotka-Volterra.

El modelo presa-depredador se basa en un sistema de ecuaciones diferenciales que describen las tasas de cambio de las poblaciones de presas y depredadores en función del tiempo. En su forma más básica, el modelo consta de dos ecuaciones: una que describe la tasa de cambio de la población de presas (por ejemplo, conejos) y otra que describe la tasa de cambio de la población de depredadores (por ejemplo, zorros).

La ecuación para la población de presas generalmente sigue una dinámica de crecimiento exponencial, donde la tasa de reproducción de las presas supera su tasa de mortalidad. Sin embargo, la presencia de depredadores ejerce presión sobre la población de presas, lo que lleva a una disminución en su crecimiento. Por otro lado, la ecuación para la población de depredadores refleja su dependencia de la disponibilidad de presas. A medida que aumenta la población de presas, la población de depredadores tiende a crecer, ya que tienen más recursos para alimentarse. Sin embargo, una vez que la población de depredadores alcanza cierto tamaño, su tasa de crecimiento disminuye debido a la escasez de presas.

Hay dos ecuaciones importantes que necesitamos conocer:

1. Ecuación de las Presas (Conejos)
2. Ecuación de los Depredadores (Zorros)

Cada una de estas ecuaciones nos dice cómo cambia la cantidad de conejos y zorros con el tiempo.

Ecuación de las Presas (Conejos)

$$\frac{dN}{dt} = aN - bNP$$

Donde:

N es la cantidad de conejos.

t es el tiempo.

a es la tasa de crecimiento de los conejos (qué tan rápido se reproducen).

b es la tasa de depredación (qué tan rápido los zorros cazan a los conejos).

P es la cantidad de zorros.

aN: Los conejos se reproducen a una tasa proporcional a su cantidad. Si hay más conejos, habrá más nacimientos.

bNP: Los conejos son cazados por los zorros. Si hay más lobos y más conejos, más conejos serán cazados

Ecuación de los depredadores (zorros)

$$\frac{dP}{dt} = -cP + dNP$$

Donde:

P es la cantidad de zorros.

c es la tasa de mortalidad de los lobos (qué tan rápido mueren sin presas).

d es la eficiencia de caza (qué tan efectivo es cazar conejos para su supervivencia).

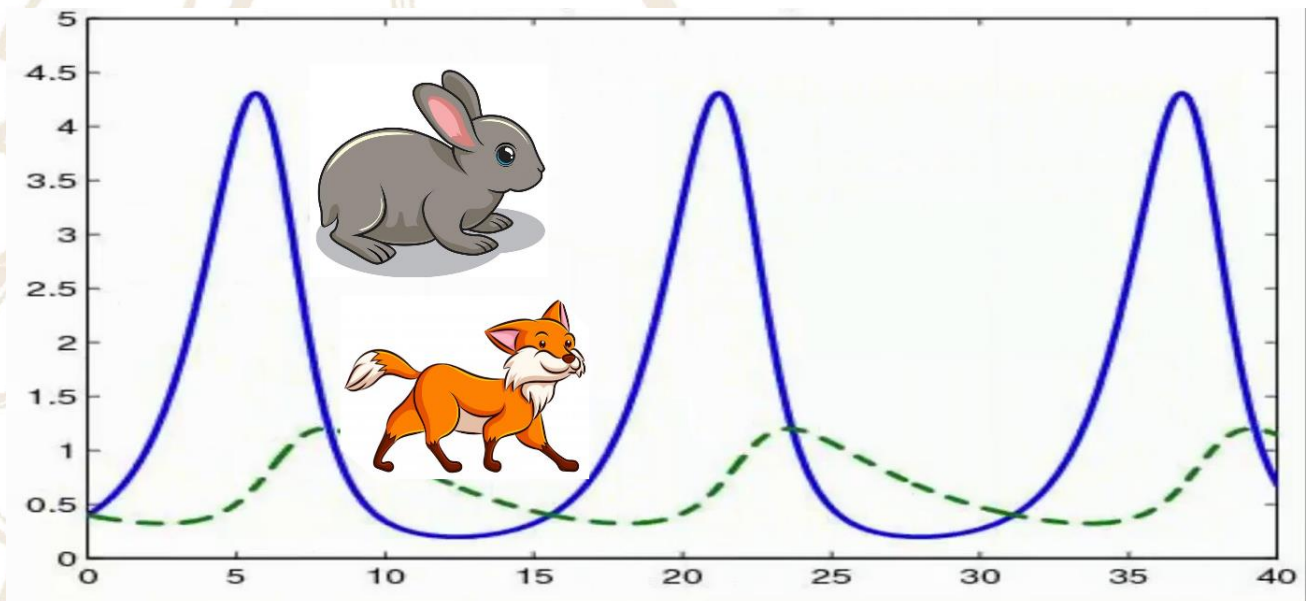
N es la cantidad de conejos.

-cP: Los lobos mueren a una tasa proporcional a su cantidad. Si no tienen suficientes conejos para comer, la cantidad de zorros disminuye.

dNP: Los lobos cazan conejos. Si hay muchos conejos y zorros, más zorros sobrevivirán y crecerán en número.

Las ecuaciones de Lotka-Volterra son un modelo biomatemático que pretende responder a estas cuestiones prediciendo la dinámica de las poblaciones de presa y depredador bajo una serie de hipótesis:

- ✓ El ecosistema está aislado: no hay migración, no hay otras especies presentes, no hay plagas...
- ✓ La población de presas en ausencia de depredadores crece de manera exponencial: la velocidad de reproducción es proporcional al número de individuos. Las presas sólo mueren cuando son cazadas por el depredador.
- ✓ La población de depredadores en ausencia de presas decrece de manera exponencial.
- ✓ La población de depredadores afecta a la de presas haciéndola decrecer de forma proporcional al número de presas y depredadores (esto es como decir de forma proporcional al número de posibles encuentros entre presa y depredador).
- ✓ La población de presas afecta a la de depredadores también de manera proporcional al número de encuentros, pero con distinta constante de proporcionalidad (dependerá de cuanto sacien su hambre los depredadores al encontrar una presa).



Estas interacciones dinámicas entre las poblaciones de presas y depredadores dan como resultado oscilaciones periódicas en las dos poblaciones. Por ejemplo, cuando la población de presas es alta, la población de depredadores también tiende a aumentar, lo que a su vez reduce la población de presas. A medida que disminuye la población de presas, la población de depredadores comienza a disminuir debido a la falta de alimentos, lo que permite que la población de presas se recupere nuevamente.

El modelo presa-depredador de Lotka-Volterra proporciona una herramienta invaluable para comprender las complejas interacciones entre las poblaciones de presas y depredadores en los ecosistemas naturales. Aunque simplificado, este modelo nos permite explorar cómo cambios en una población pueden influir en otra, y cómo estas interacciones pueden conducir a patrones de oscilación característicos en las poblaciones de presas y depredadores. Al comprender mejor estas dinámicas, podemos apreciar la fragilidad y la resiliencia de los ecosistemas y trabajar para conservar su equilibrio.

Ejemplo Simple

Supongamos que en un bosque hay 50 conejos y 5 zorros. Usando las ecuaciones de Lotka-Volterra, podemos ver cómo cambiarán estas cantidades con el tiempo:

1. Si hay muchos conejos y pocos zorros, los conejos se reproducen rápidamente.
2. A medida que aumenta la cantidad de conejos, hay más comida para los zorros, por lo que la cantidad de zorros también empieza a crecer.
3. Con más zorros cazando conejos, la cantidad de conejos empieza a disminuir.
4. Con menos conejos disponibles, algunos zorros mueren por falta de comida, y así la cantidad de zorros disminuye.

Este ciclo se repite una y otra vez, creando un equilibrio dinámico en el bosque.

Hay otras situaciones en donde se involucran ecuaciones diferenciales, a continuación, te describimos algunas.

La segunda ley de Newton como ecuación que involucra derivadas

Las derivadas son herramientas matemáticas muy importantes al momento de estudiar el movimiento de algunos objetos, como es el caso de la aceleración en la segunda ley de Newton, la cual se expresa matemáticamente de la siguiente manera:

$$F = m a$$

Donde F = fuerza aplicada sobre el objeto, m = masa del objeto y a = aceleración producida debido a la fuerza que pone en movimiento al objeto.

Al aplicar la derivada de la función de posición en función del tiempo, encontramos la función de velocidad; igualmente, al aplicar la derivada de la función de velocidad encontramos la función de aceleración; entonces la primera derivada temporal de la función de posición (x) corresponde a la función de velocidad (v), esto es, $\frac{dx}{dt} = v$ y la derivada de tiempo de la función de velocidad es la aceleración $\frac{dv}{dt} = a$; ó sea, la segunda derivada de la posición es la aceleración y se escribe $\frac{d^2x}{dt^2} = a$; que sustituyendo en la ecuación de la segunda ley de Newton queda: $F = m \frac{d^2x}{dt^2}$

Modelo de crecimiento bacteriano

Cuando se analizan los fenómenos que implican razones de cambio, nos encontramos que son en su mayoría fenómenos físicos, biológicos, entre otros, cuya característica principal es que una variable puede crecer o disminuir en comparación a otra.

Existen numerosos modelos matemáticos de diversa índole que se utilizan hoy en día para el estudio de problemas en Biología y otras ciencias experimentales; sus objetivos principales son describir, explicar y predecir fenómenos y procesos en dichas áreas, la gran parte de tales modelos matemáticos se expresa mediante ecuaciones diferenciales

Las bacterias cultivadas en el laboratorio son un excelente ejemplo de crecimiento exponencial. En el **crecimiento exponencial**, la tasa de crecimiento de la población aumenta con el tiempo, en proporción con el tamaño de la población.

Las bacterias se reproducen por fisión binaria (se dividen por la mitad) y el tiempo entre divisiones es de alrededor de una hora en muchas especies bacterianas. Para ver como crecen exponencialmente, empecemos por ejemplo con 1000 bacterias en un matraz con una cantidad ilimitada de nutrientes.

Después de 1 hora: cada bacteria se divide, lo que produce 2000 bacterias (un aumento de 1000 bacterias).

Después de 2 horas: cada una de las 2000 bacterias se divide, lo que produce 4000 bacterias (un aumento de 2000 bacterias).

Después de 3 horas: cada una de las bacterias se divide, lo que produce 8000 bacterias (un aumento de 4000 bacterias)

Los resultados pueden ser dramáticos: después de 1 día (24 ciclos de división) nuestra población de bacterias habría aumentado de 1000 a más de 16 mil millones.

el crecimiento exponencial de una población, en este caso de las bacterias; se expresa matemáticamente con ecuación la ecuación diferencial $\frac{dN}{dt} = rN$ donde: r es la tasa de crecimiento N = tamaño de la población en un tiempo t .



TABASCO

"Educación que genera cambio"



COBATAB
COLEGIO DE BACHILLERES
DE TABASCO

Modelo matemático del decaimiento radiactivo (ley de la desintegración radiactiva)

La radiación es un fenómeno aleatorio que sigue una cinética de primer orden, por lo que podemos adaptar las relaciones matemáticas que se utilizan en las reacciones químicas de primer orden.

Así el número de núcleos (N) que se desintegran por unidad de tiempo (t), es proporcional al número de núcleos radiactivos existentes $\frac{\Delta N}{\Delta t} = -\lambda N$

λ = "constante de desintegración", característica de cada isótopo (y de cada modo de desintegración, si tuviese varios). Sus unidades son (tiempo)⁻¹

(El signo menos indica que el número de núcleos originales disminuye con el tiempo).

Si ΔN y Δt se hacen suficientemente pequeños pueden reemplazarse por sus respectivos diferenciales $\frac{dN}{dt} = -\lambda N$, que al integrarse ambos lados de la ecuación, tienen como solución la ecuación de decaimiento radiactivo $N = N_0 e^{-\lambda t}$ donde N_0 = número de átomos existentes en el tiempo cero o inicial y N = número de átomos existentes en el tiempo t , o *tiempo final*.



TABASCO

"Educación que genera cambio"



COBATAB
COLEGIO DE BACHILLERES
DE TABASCO

SESIÓN 26

CATEGORIAS

C2 Procesos de intuición y razonamiento
C3 Solución de problemas y modelación
C4 Interacción y lenguaje matemático



PM3-SA2 ACT07

ACTIVIDAD DE REFORZAMIENTO

Instrucciones: En equipo de 5 integrantes investigar en cualquier medio, 2 ejemplos más relacionados con el tema, tomando como guía el explicado por el docente. Presentar estos ejemplos en un informe escrito de forma manual o impreso

SESIÓN 27

Progresión 15

El cambio acumulado y el área bajo una curva y estudio de la distribución normal

ÁREA BAJO LA CURVA

Así como la derivada es motivada por el problema geométrico de construir una tangente a una curva, el problema histórico que conduce a la definición de la integral es el problema de encontrar un área.

"Encontrar el área A de una región acotada por el eje x y la gráfica de una función no negativa continua $y = f(x)$ definida sobre un intervalo $[a, b]$."

El área de esta región se denomina área bajo la gráfica de f sobre el intervalo $[a, b]$. El requerimiento de que f sea no negativa sobre $[a, b]$ significa que ninguna parte de esta gráfica sobre el intervalo está por abajo del eje x .

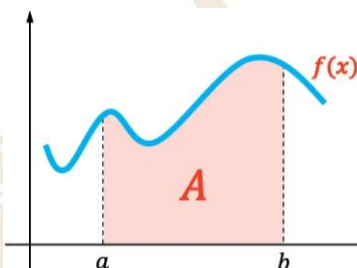


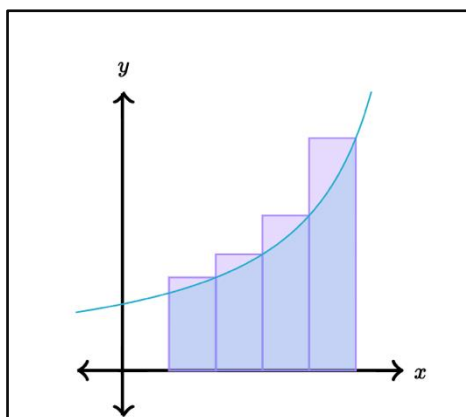
Imagen tomada de: <https://images.app.goo.gl/jvoLb32k1qgU9wSa8> en junio 2024

Cuando se inicia el estudio de la geometría conocemos muchas fórmulas para calcular el área de diferentes figuras geométricas. Sin embargo, no sabemos calcular el área debajo de la curva de la figura anterior en el intervalo $[a, b]$.

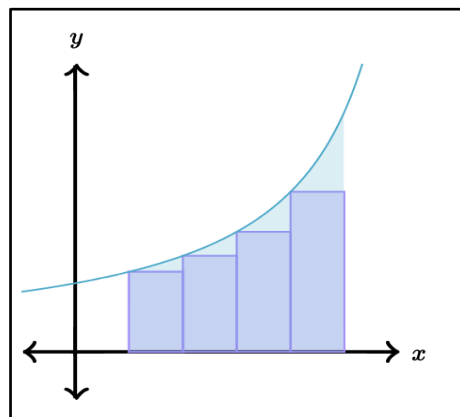
Se puede aproximar el valor del área bajo la curva si optamos por dibujar rectángulos con altura igual a la ordenada (eje de las Y). Para esto se tienen dos opciones:

- Dibujamos los rectángulos de manera que una parte del mismo quede por encima de la parábola (Circunscritos).
- Dibujamos los rectángulos inscritos de manera que una parte quede por debajo de la parábola (Inscritos).

En el primer caso un error habrá por exceso, es decir, será mayor al valor del área que buscamos.
En el segundo caso se tendrá el área aproximada, será un poco menor al área debajo de la parábola, en este caso la aproximación que se haga tendrá un error por defecto.



RECTÁNGULOS CIRCUNSCRITOS



RECTÁNGULOS INSCRITOS

Tomado de: <https://es.khanacademy.org/math/ap-calculus-ab/ab-integration-new/ab-6-2/a/riemann-sums-review> en junio 2024

Es importante determinar que la base de los rectángulos siempre será la misma debido a que usaremos la siguiente fórmula:

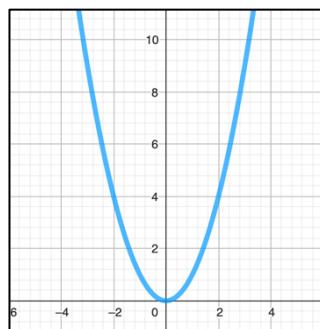
$$\text{base del rectángulo} = \frac{b - a}{n}$$

Donde:

- **a** es el límite inicial
- **b** el límite final que cortan a la función para determinar el área.
- **n** es el número de rectángulos que se quieren utilizar.

Ejemplo 1. Determina el área comprendida por la función $y = x^2$ en el intervalo $[2,5]$, con 10 rectángulos inscritos.

Paso 1: Graficar la función.

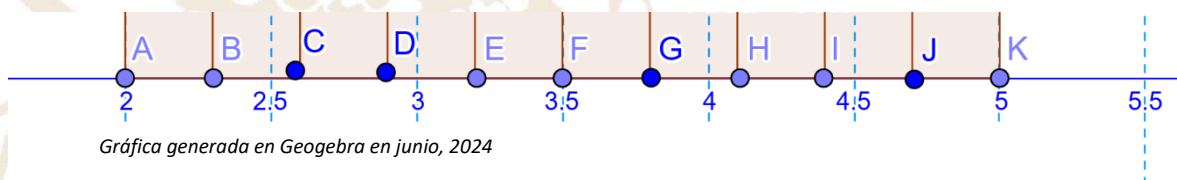


Paso 2: determinar las bases de los rectángulos, aplicando la fórmula.

$$\text{base del rectángulo} = \frac{b - a}{n}$$

$$\text{base del rectángulo} = \frac{5 - 2}{10} = 0.3$$

Paso 3: Enseguida ubicamos los puntos de las bases de los rectángulos en el eje X, iniciando del valor 2 e iremos sumando el valor de 0.3, hasta llegar a 5.



$2 + 0.3 = 2.3$	$3.5 + 0.3 = 3.8$
$2.3 + 0.3 = 2.6$	$3.8 + 0.3 = 4.1$
$2.6 + 0.3 = 2.9$	$4.1 + 0.3 = 4.4$
$2.9 + 0.3 = 3.2$	$4.4 + 0.3 = 4.7$
$3.2 + 0.3 = 3.5$	$4.7 + 0.3 = 5$

Paso 4: Luego trazaremos cada rectángulo, recordando que no deben superar el trazo de la función y aprovecharemos para determinar el valor del área de cada uno.

Recuerda que los valores para obtener la altura de los rectángulos que se van a sustituir en la función original son los que tocan el trazo de la función.

Rectángulo 1

El valor que se sustituirá en la función original para obtener la altura (h) es:

$$x = 2$$

- Base = 0.3
- Altura $(2)^2 = 4$

$$\text{Área 1} = 0.3 * 4 = 1.2u^2$$

Rectángulo 6

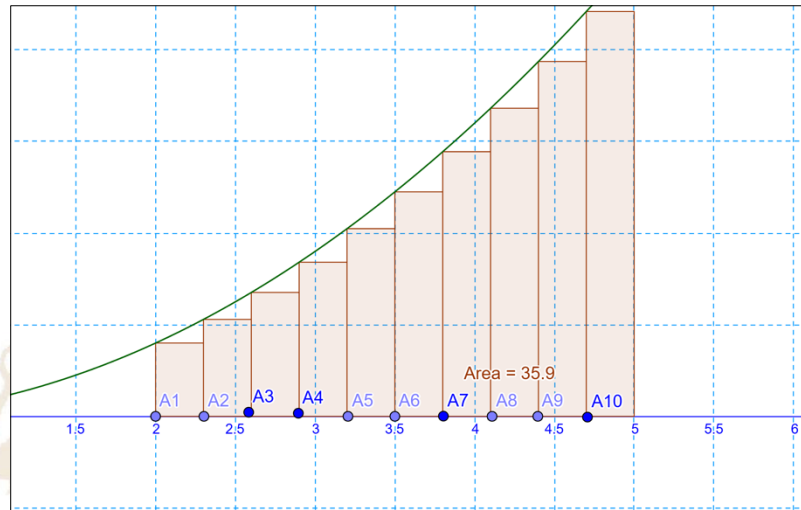
El valor que se sustituirá en la función original para obtener la altura (h) es

$$x = 3.5$$

- Base = 0.3
- Altura $(3.5)^2 = 12.25$

$$\text{Área 6} = 0.3 * 12.25 = 3.67u^2$$

<u>Rectángulo 2</u> El valor que se sustituirá en la función original para obtener la altura (h) es: x = 2.3 • Base = 0.3 • Altura = $(2.3)^2 = 5.29$ Área 2 = $0.3 * 5.29 = 1.5u^2$	<u>Rectángulo 7</u> El valor que se sustituirá en la función original para obtener la altura (h) es x = 3.8 • Base = 0.3 • Altura = $(3.8)^2 = 14.44$ Área 7 = $0.3 * 5.29 = 4.33u^2$
<u>Rectángulo 3</u> El valor que se sustituirá en la función original para obtener la altura (h) es: x = 2.6 • Base = 0.3 • Altura = $(2.6)^2 = 6.76$ Área 3 = $0.3 * 5.29 = 2.03u^2$	<u>Rectángulo 8</u> El valor que se sustituirá en la función original para obtener la altura (h) es x = 4.1 • Base = 0.3 • Altura = $(4.1)^2 = 16.81$ Área 8 = $0.3 * 5.29 = 5.04u^2$
<u>Rectángulo 4</u> El valor que se sustituirá en la función original para obtener la altura (h) es: x = 2.9 • Base = 0.3 • Altura = $(2.9)^2 = 8.41$ Área 4 = $0.3 * 5.29 = 2.52u^2$	<u>Rectángulo 9</u> El valor que se sustituirá en la función original para obtener la altura (h) es x = 4.4 • Base = 0.3 • Altura = $(4.4)^2 = 19.36$ Área 9 = $0.3 * 5.29 = 5.8u^2$
<u>Rectángulo 5</u> El valor que se sustituirá en la función original para obtener la altura (h) es x = 3.2 • Base = 0.3 • Altura = $(3.2)^2 = 10.24$ Área 5 = $0.3 * 5.29 = 3.07u^2$	<u>Rectángulo 10</u> El valor que se sustituirá en la función original para obtener la altura (h) es x = 4.7 • Base = 0.3 • Altura = $(4.7)^2 = 22.09$ Área 10 = $0.3 * 5.29 = 6.62u^2$



Paso 5: Se realiza la sumatoria de todas las áreas de los rectángulos para poder encontrar el área bajo la curva.

$$\sum AT = A1 + A2 + A3 + A4 + A5 + A6 + A7 + A8 + A9 + A10$$

$$\sum AT = 1.2 + 1.5 + 2.03 + 2.52 + 3.07 + 3.67 + 4.33 + 5.04 + 5.8 + 6.62$$

$$\sum AT = 35.08 U^2$$



TABASCO

"Educación que genera cambio"



COBATAB
COLEGIO DE BACHILLERES
DE TABASCO

CATEGORIAS

PM3-SA2 ACT08

ACTIVIDAD DE REFORZAMIENTO

C2 Procesos de intuición y razonamiento



Instrucciones: Realizar los siguientes ejercicios propuestos en equipo de 5 integrantes, utilizando el método de rectángulos inscritos.

- Determina el área bajo la curva de la función $y = (3x + 1)^2$ en el intervalo $[-1, 2]$ con 6 rectángulos.

- Determinar el área bajo la curva de la función $y = 2x^2 + 3$ en el intervalo $[0, 2]$ con 8 rectángulos.

SESIÓN 28

Retoma la situación de aprendizaje planteada. **“Máximando Ando”** y revisa el problema de contexto de la sesión 18

Situación de Aprendizaje 2 (Para abordar en la sesión número 28)	
Estrategia Didáctica:	Presentación (física/digital)
Título:	Máximando Ando
Contexto:	El Programa Institucional Hacia la Sostenibilidad (PIHASO) del Colegio de Bachilleres de Tabasco (COBATAB) es una iniciativa que busca fomentar en la comunidad educativa del subsistema, mediante la puesta en marcha de un programa de sostenibilidad, una cultura de responsabilidad personal que contribuya a preservar los recursos naturales, los bienes económicos y los activos sociales, para el bienestar actual y de las futuras generaciones. En el cumplimiento de este objetivo, y alineados desde el año 2020 el Voluntariado del COBATAB lleva a cabo el programa: “Por mí, Por ti, Sembrando con Amor” cuya finalidad de implementación en los Centros Educativos del subsistema es valorar el papel de la familia y de los padres como educadores y ejemplos de vida; así como, promover vínculos familiares a través de la participación y establecimiento de huertos que den sustentabilidad al hogar, a los centros educativos y al entorno. El 25 de septiembre de 2015, los líderes mundiales adoptaron un conjunto de objetivos globales para erradicar la pobreza, proteger el planeta y asegurar la prosperidad para todos como parte de una nueva agenda de desarrollo sostenible (agenda 2030). Para alcanzar estas metas TODOS debemos hacer nuestra parte, aprovechar las bondades de la tierra al mismo tiempo que cuidamos de ella. Desde primer semestre el reto para COBATAB es el desarrollo de huertos escolares que implica trabajo en equipo, aprendizaje para una vida sostenible, así como, el cuidado de nuestro entorno, contemplar las características de nuestro suelo, el área de trabajo, tipos de cultivos y distribución de árboles. Generalmente el problema es poder determinar el número total de árboles para obtener la producción máxima. En un plantel del COBATAB se tiene un huerto que actualmente cuenta con 20 árboles, que produce 500 frutos cada uno. Se calcula que, por cada árbol adicional plantado, la producción de cada árbol disminuye en 10 frutos.
Conflicto cognitivo:	a) ¿Cuál debe ser el número total de árboles que debe tener el huerto para que la producción sea máxima? b) ¿Cuál será esa producción? c) Expresa de la forma más apropiada y entendible los resultados para su socialización en grupo.

PM3_SA1-EP01

CUESTIONARIO TIPO PLANEA SA 2

Indicaciones Lee cuidadosamente cada reactivo e individualmente elige la opción de respuesta correcta

1. Dada la función $f(x) = 4x^3 - 5x$, su derivada será:

a) $\frac{dy}{dx} = 7x^3 - 5$

b) $\frac{dy}{dx} = 12x^3 - 8$

c) $\frac{dy}{dx} = 12x^2 - 5$

d) $\frac{dy}{dx} = 12x - 5$

3. Es la velocidad promedio en un instante específico de tiempo o en un intervalo de tiempo infinitesimalmente pequeño, es decir, el límite tiende a cero sin llegar a serlo.

- a) Variación en la velocidad.
b) Razón de cambio promedio.
c) Velocidad media.
d) Razón de cambio instantánea.

2. Es el límite de la razón del incremento de la función al incremento de la variable independiente cuando éste tiende a cero.

- a) Derivada
b) Límite
c) Indeterminación
d) Asíntota

4. Dada la función real $f(x) = 3x^2$, reemplaza la expresión algebraica en la definición de Razón de Cambio

Instantánea: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

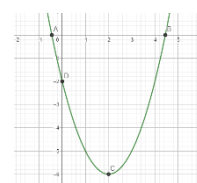
- a) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x$
b) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x$
c) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 5x$
d) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 4x$

5. El punto crítico de la función $f(x) = x^2 - 4x - 2$ es:

- a) (6, -2)
b) (2, 6)
c) (2, -6)
d) (-2, 6)

6. Determina el número de puntos críticos de la siguiente gráfica

- a) 0
b) 1
c) 2
d) 3



7. El costo total, en pesos para producir x metros de cierta tela es: $C(x) = 40\,000 + 20x + 0.1x^2 + 0.002x^3$. ¿Cuál es la función de costo marginal?

- a) $C'(x) = 20 + 0.2x + 0.006x^2$
b) $C'(x) = 30\,000 + 0.2x + 0.006x^2$
c) $C'(x) = 20 + 2x + 0.006x^2$
d) $C'(x) = 2 + 0.2x + 0.006x^2$

8. Cuáles es la longitud de un campo rectangular o cuadrangular de 3 600 m² de superficie, para poderlo cercar con el mínimo de material.

- a) 85 m
b) 75 m
c) 95 m
d) 60 m

9. El resultado de $5^2 \cdot 5^3$ es igual a:

- a) 25
- b) 125
- c) 3125
- d) 15625

10. El resultado de $\log_4(16 \cdot 64)$ es igual a:

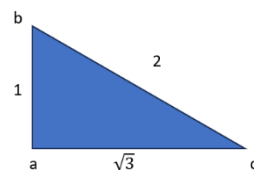
- a) 2
- b) 3
- c) 4
- d) 5

11. Identifica la función trigonométrica que tiene la siguiente propiedad: tiene un punto de partida en 1 ($0/\pi$ ó 0°) y baja hasta -1 (π ó 180°).

- a) Función Cotangente.
- b) Función Secante.
- c) Función Seno.
- d) Función coseno.

12. Hallar m sabiendo que $(\pi/6; m+1)$ pertenece a la gráfica de la función seno dado que $\angle abc = 60^\circ$ y $\angle bca = 30^\circ$

- a) 1.
- b) 5.
- c) $-1/2$.
- d) -2.



13. En una ecuación, que representa la posición de un objeto con respecto al tiempo, la primera derivada representa:

- a) La posición del objeto
- b) La velocidad
- c) La aceleración
- d) La rapidez

14. En una ecuación, que representa la posición de un objeto con respecto al tiempo, la segunda derivada representa:

- a) La posición del objeto
- b) La velocidad
- c) La aceleración
- d) La rapidez

15. Se define como el área bajo la curva

- a) Derivada.
- b) Integral.
- c) Función.
- d) Polinomio.

16. Cuál las de las siguientes fórmulas representa la base de los rectángulos para el cálculo del área bajo la curva.

- a) $base\ del\ rectángulo = \frac{a-b}{n}$
- b) $base\ del\ rectángulo = \frac{n-a}{b}$
- c) $base\ del\ rectángulo = \frac{b-a}{n}$
- d) $base\ del\ rectángulo = \frac{b+a}{n}$

PM3-SA2-MA02 Mapa de aprendizaje para evaluar las progresiones de la SA 2

UAC:	Pensamiento Matemático III	Progresiones	8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15	Fecha:	
Nombre				Grupo:	
				Turno:	

Situación de aprendizaje 1: "Y ¿Cuándo voy a usar esto?"

Mapa de aprendizaje

1: Necesito ayuda

2: Puedo hacerlo solo

3: Puedo ayudar a otros

Progresión de Aprendizaje	Nivel			Que debo hacer para mejorar:
	1	2	3	
Encuentro de manera heurística algunas reglas de derivación como la regla de la suma, la regla del producto, la regla del cociente y la regla de la cadena y las aplica en algunos ejemplos				
Selecciono una problemática en la que el cambio sea un factor fundamental en su estudio para aplicar el concepto de la derivada como razón de cambio instantánea				
Explico y socializo el papel de la derivada para analizar una función (donde crece/decrece, máximo/mínimos locales, concavidades) y trazo su gráfica				
Resuelvo problemas de su entorno o de otras áreas del conocimiento empleando funciones y aplicando la derivada (ejemplo: problemas de optimización), organizo su procedimiento y lo someto a debate				
Examino la gráfica de funciones logarítmicas con diferentes bases y las gráficas de las funciones exponenciales para describirlas y realizar afirmaciones sobre el significado de que la función exponencial y logarítmica de base "a" sean funciones inversas entre sí				
Analizo y describo un fenómeno en el que la periodicidad sea un constituyente fundamental a través del estudio de propiedades básicas funciones trigonométricas				
Selecciono una problemática, situación o fenómeno tanto real como ficticio para modelarlo utilizando funciones deriva				
Considero y reviso algunas ideas subyacentes al teorema fundamental del cálculo				

Nombre y Firma del estudiante:	Firma del Facilitador

Referencias SA 2

Cantoral, R., Montiel, G. (2014). *Precálculo, un enfoque visual*. Pearson Educación, México.
COBATAB (2020). *Matemáticas IV, guía didáctica*. Tabasco.

Purcell, E. J., Varberg, D., Rigdon, S. E (2007). *Cálculo diferencial e integral*, 9ª ed. Pearson Educación, México.

Función exponencial (2024, 19 de mayo). En Wikipedia.
https://es.wikipedia.org/wiki/Funci%C3%B3n_exponencial

La función exponencial y algunos ejemplos (2024, 19 de mayo).
<https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/calculo/funciones/funcion-exponencial.html>

Logaritmo (2024, 19 de mayo). En Wikipedia. <https://es.wikipedia.org/wiki/Logaritmo>
Logaritmos y funciones logarítmicas (2024, 19 de mayo).
<https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/calculo/funciones/funciones-logaritmicas.html>

Matemóvil. (2016, 21 marzo). Función trigonométrica seno - ejercicios resueltos [Vídeo]. YouTube. <https://www.youtube.com/watch?v=JwGW8YyNp4M>

Gráficas de Seno, Coseno y Tangente. (s. f.). <https://www.disfrutalasmatematicas.com/algebra/trig-sen-cos-tan-graficas.html>

Geogebra (2023) <https://www.geogebra.org/m/DZWbUPpb>

Abramson, J. (2022, 18 mayo). 5.2 Círculo unitario: funciones seno y coseno - Precálculo 2ed | OpenStax. <https://openstax.org/books/prec%C3%A1culo-2ed/pages/5-2-circulo-unitario-funciones-seno-y-coseno>

(Características de las Funciones Seno y Coseno, 2014)

Funciones. (2023, 5 octubre). Función seno. Funciones matemáticas.
<https://www.funciones.xyz/funcion-seno/>
Graficando la función seno. (s. f.).
https://www.varsitytutors.com/hotmath/hotmath_help/spanish/topics/graphing-sine-function

Gráficas de Seno, Coseno y Tangente. (s. f.). https://www.disfrutalasmatematicas.com/algebra/trig-sen-cos-tan-graficas.html#google_vignette

Guzman, J. H. (2022, 3 junio). *Gráfica del Seno con Ejemplos*. Neurochispas. <https://www.neurochispas.com/wiki/grafica-del-seno/>

Crecimiento exponencial y logístico (artículo) | Khan Academy. (s.f.). Khan Academy. <https://es.khanacademy.org/science/ap-biology/ecology-ap/population-ecology-ap/a/exponential-logistic-growth>

Lectura – 2da ley de Newton: una ecuación con derivadas – Mi Portal. (s.f.). <https://miportal.integrandoslp.com/topic/lectura-2da-ley-de-newton-una-ecuacion-con-derivadas/>

Herráez, A. (s.f.). *Técnicas isotópicas*. <https://biomodel.uah.es/tecnicas/isotopos/inicio.htm>

HIMNO COLEGIO

*Oh Colegio de bachilleres impetuosa y querida
institución casa fiel del conocimiento
hoy te canto este himno con amor,
eres rayo de esperanza del mañana
eres la voz de la verdad*

*Oh colegio de bachilleres eres
luz en medio de la oscuridad
//Colegio de bachilleres conducta
clara y firme decisión
Colegio de bachilleres tu misión
para siempre es ser mejor//*

*En Tabasco se ha sembrado
la semilla que un día germinara,
el impulso de la vida modernista
en progreso de toda la sociedad,
es tu memorable historia gran
orgullo para toda la región,
educación que genera
cambio ejemplo digno
en cada generación.*





TABASCO

"Educación que genera cambio"



COBATAB
COLEGIO DE BACHILLERES
DE TABASCO

PORRA INSTITUCIONAL

¡Somos!
¡Somos!

Jóvenes Bachilleres
Jóvenes Bachilleres

Con Valor y Lealtad

De Norte a Sur
De Este a Oeste

Somos Líderes Bachilleres del Sureste
Cobatab Unido, Cobatab Fortalecido

Este encuentro lo gano por que lo gano
Como dijo el peje me canso ganso

¡Somos!
¡Somos!

Jóvenes Bachilleres
Jóvenes Bachilleres

¡Somos!
¡Somos!

Jóvenes Bachilleres
Jóvenes Bachilleres

Cobatab Unido, Cobatab Fortalecido



COBACHITO

Colegio De Bachilleres,
Está de fiesta señores
Pues todos sus estudiantes
Hoy celebran con honores

Que ya llegó la alegría
Es hora de motivar
Bailemos con algarabía
Cobachito nos guiará.

Allá por el acahual
En los ríos de Tabasco
Aconchado en unas ramas
O nadando sin parar

Un manatí se ha ganado
El cariño de la gente
Cobachito le han llamado
Y no para de bailar.

Cobachito, con él vamos a ganar
Cobachito, eres espectacular
Cobachito, respetamos tu hábitat
Cobachito, mascota del cobatab.

Mientras la orquesta se escucha
Y la porra se emociona
Los jóvenes bachilleres
A una voz ovacionan.

Con orgullo representan
A una gran institución
Cobatab esta presente
Y cobachito ya llegó.

Cobachito,...





TABASCO

"Educación que genera cambio"



COBATAB
COLEGIO DE BACHILLERES
DE TABASCO

Pensamiento Matemático III

"Me parece haber sido sólo un niño
jugando en la orilla del mar,
divirtiéndose y buscando una piedra
más lisa o una concha más bonita de lo
normal, mientras el gran océano de la
verdad yacía ante mis ojos con todo
por descubrir"

Isaac Newton.



¡GRACIAS!

Mucho éxito.
Nos vemos en
cuarto semestre.

